Ueber einige zu zwei ternären quadratischen Formen in Beziehung stehende Konnexe.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Hohen philosophischen Fakultät, II. Sektion
der Kgl. Bayer. Ludwig-Maximilians-Universität zu München

am 26. Juni 1908 vorgelegt

von

H. Degenhart
gepr. Lehramtskandidat.

München
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548315_0042

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdankt der Verfasser Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Lindemann, für dessen gütige Unterstützung während des Entstehens der Arbeit der Verfasser auch an dieser Stelle seinen herzlichsten Dank auszusprechen sich gestattet.

In den Vorlesungen von Clebsch, herausgegeben von Dr. F. Lindemann, ist nach Gordan das vollständige Formensystem zweier quadratischer ternärer Formen aufgestellt, welches neben einer gewissen Anzahl von In-, Ko- und Kontravarianten acht Zwischenformen enthält. Der erste Teil der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit der Interpretation dieser Zwischenformen als Konnexe. Bei diesen aus ternären Grundformen entstandenen Zwischenformen konzentriert sich das Hauptinteresse auf den Zusammenhang der durch die Konnexe dargestellten Kurven mit den durch die Grundformen gegebenen Kurven, insbesondere auf die Beziehung der durch die Integration der Hauptkoinzidenz der Konnexe gelieferten Integralkurven zu den Grundkurven. Für die acht Zwischenformen des Systems der beiden quadratischen Formen ergab sich die Integration der Hauptkoinzidenzen durch Formen des vollständigen Systems selbst, wodurch eine übersichtliche Darstellung dieses Zusammenhanges ermöglicht ward.

Der zweite Teil der Arbeit behandelt zwei Zwischenformen, die durch das Hinzutreten einer linearen Form zu den beiden quadratischen Formen entstehen. Die Integration der Hauptkoinzidenz des einen dieser Konnexe lieferte ein nicht uninteressantes Beispiel für die Lösung einer Differentialgleichung mit Hilfe geometrischer Überlegungen, während die Integration der Hauptkoinzidenz des anderen der beiden Konnexe auf Grund eines von A. Harnack in Band 9 der mathematischen Annalen angegebenen allgemeinen Verfahrens durch in diesem Falle wirklich ausführbare Quadraturen auf ein Eliminationsproblem sich zurückführen ließ.

I. Teil.

Das vollständige Formensystem zweier quadratischer ternärer Formen besteht aus den folgenden 20 Formen:

$$f = a_x^2 \qquad f' = a_x'^2$$
$$F_{11} = u_\alpha^2 \qquad F_{22} = u_{\alpha'}^2$$
$$A_{111} = a_\alpha^2 \qquad A_{222} = a_{\alpha'}'^2$$
$$A_{112} = a_\alpha'^2 \qquad A_{122} = a_{\alpha'}^2$$
$$F_{12} = (a\,a'\,u)^2 \qquad \Phi_{12} = (a\,a'\,x)^2$$
$$D = (a\,a'\,u)\,a_{\alpha'}\,a_\alpha'\,u_\alpha\,u_{\alpha'} \qquad \Delta = (a\,a'\,x)\,a_{\alpha'}\,a_\alpha'\,a_x'\,a_x$$

$$B_1 = a_\alpha'\,a_x'\,u_\alpha \qquad B_2 = a_{\alpha'}\,a_x\,u_{\alpha'}$$
$$N = (a\,a'\,u)\,a_x\,a_x' \qquad \mathrm{N} = (a\,a'\,x)\,u_\alpha\,u_{\alpha'}$$
$$C_1 = (a\,a'\,u)\,a_\alpha'\,a_x\,u_\alpha \qquad \Gamma_1 = (a\,a'\,x)\,a_{\alpha'}\,u_\alpha\,a_x$$
$$C_2 = (a\,a'\,u)\,a_{\alpha'}\,a_x'\,u_{\alpha'} \qquad \Gamma_2 = (a\,a'\,x)\,a_\alpha'\,u_{\alpha'}\,a_x'$$

Aufgabe des ersten Teils der vorliegenden Arbeit ist die geometrische Interpretation der 8 Zwischenformen dieses Systems als Konnexe.

§ 1.

Die Kombinante N.

Die Zwischenform $N = (a\,a'\,u)\,a_x\,a_x'$ läßt sich als Funktionaldeterminante von f, f' und u_x darstellen:

$$N = \tfrac{1}{4} \sum \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f'}{\partial x_2} u_3.$$

Demgemäß ergibt sich folgende geometrische Interpretation für N:

Jeder Geraden u ist ein Kegelschnitt zugeordnet als Ort derjenigen Punkte x, deren Polaren in Bezug auf f und f' sich auf u schneiden.

Jedem Punkte x ist der Schnittpunkt seiner Polaren in Bezug auf f und f' zugewiesen. Wir bemerken hier sogleich, daß genau dieselbe Interpretation für die analog gebildete Zwischenform zweier Formen m^{ter} Ordnung:

$$F = a_x^m, \qquad F' = a_x'^m$$

gilt.

Bildet man nämlich:

$$M = \frac{1}{m^2} \Sigma \pm \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial F'}{\partial x_2} u_3 = (a\, a'\, u)\, a_x^{m-1}\, a_x'^{m-1}$$

so wird wiederum vermöge M jeder Geraden u die Kurve $2(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung derjenigen Punkte x zugeordnet, deren lineare Polaren in Bezug auf F und F' sich auf u schneiden, und jedem Punkte x der Schnittpunkt seiner linearen Polaren in Bezug auf F und F'.

Die Hauptkoinzidenz von N.

Nimmt man zu dem Konnex $N = 0$ den Konnex $u_x = 0$ hinzu, so entspricht in der beiden Konnexen gemeinsamen Hauptkoinzidenz jedem Punkte eine Gerade, die Verbindungslinie mit dem ihm durch den Konnex N zugeordneten Punkte; jeder Geraden sind zwei Punkte zugewiesen, die Schnittpunkte mit dem ihr zugeordneten Kegelschnitt.

Die Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz läßt sich hier leicht integrieren; nämlich aus:

$$(a\, a'\, \widehat{x\, dx})\, a_x\, a_x' = 0$$

ergibt sich:

$$0 = 2\,(a_x\, a_{dx}' - a_x'\, a_{dx})\, a_x\, a_x' = f \cdot df' - f' \cdot df$$

und durch Integration:

$$kf + \lambda f' = 0$$

d. h. die dem Punkte x zugewiesene Gerade ist die Tangente in diesem Punkte an denjenigen Kegelschnitt, welcher durch den betrachteten Punkt aus dem durch die beiden Fundamental-

kegelschnitte $f = 0$ und $f' = 0$ bestimmten Kegelschnittbüschel ausgewählt wird;

die der Geraden v zugeordneten Punkte sind die Berührungspunkte der Geraden mit den beiden Kegelschnitten, die durch sie mit dem Kegelschnittbüschel bestimmt sind.

Der Konnex $N(2, 1)$ besitzt $m^2 + m + 1 = 7$ Grundpunkte, d. h. Punkte, welche mit jeder durch sie gehenden Geraden ein Element der Hauptkoinzidenz bilden. Derartige Punkte können entstehen dadurch, daß der einem Punkte zugeordnete Punkt mit ihm zusammenfällt, oder daß der zugeordnete Punkt unbestimmt wird. Mit Rücksicht auf die Definition des zugeordneten Punktes hat man also:

Die Grundpunkte des Konnexes N sind die 4 Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $f' = 0$ und die 3 Ecken des beiden Kurven gemeinsamen Polardreiecks, d. h. die 3 Eckpunkte des durch die 4 Schnittpunkte bestimmten vollständigen Viereckes.

Für den allgemeineren Konnex $M = (a\, a'\, u)\, a_x^{m-1}\, a_x'^{m-1}$ erhalten wir entsprechende Resultate. Die Integralkurven seiner Hauptkoinzidenz sind dargestellt durch das durch die beiden Grundkurven $F = 0$ und $F' = 0$ bestimmte Büschel $kF + \lambda F' = 0$ und daraus folgt eine analoge Deutung der Elemente der Hauptkoinzidenz. Die $4(m-1)^2 + 2(m-1) + 1$ Grundpunkte bestehen wieder aus den m^2 Basispunkten des Büschels $kF + \lambda F' = 0$ und den $3(m-1)^2$ Punkten, deren lineare Polaren in Bezug auf $F = 0$ und $F' = 0$ zusammenfallen. Bezeichnet also $-\lambda$ einen Proportionalitätsfaktor, so muß für diese zweite Gruppe von Grundpunkten die Relation bestehen:

$$a_x^{m-1}\, a_i + \lambda\, a_x'^{m-1}\, a_i' = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$$

Die Resultante dieser drei Gleichungen wird in der Tat vom Grade $3(m-1)^2$ in λ. Betrachtet man aber andrerseits das Büschel

$$a_x^m + \lambda\, a_x'^m = 0$$

so sind die obigen drei Bedingungen die charakteristischen Bedingungen für einen Doppelpunkt, so daß man also sagen kann:

Die Grundpunkte des Konnexes M sind die m^2 Basispunkte des durch die beiden Kurven $F = 0$ und $F' = 0$ bestimmten Kurvenbüschels und die $3(m-1)^2$ Doppelpunkte der in dem Büschel vorkommenden Kurven mit Doppelpunkt.

Von den ausgezeichneten Kurven der Hauptkoinzidenz existieren hier nur die beiden Kurven $F' = 0$, die Enveloppe derjenigen Geraden, welche die ihnen zugewiesenen Kurven berühren, und $\Phi' = 0$, der Ort dieser Berührungspunkte. Die Gleichung der Kurve $\Phi' = 0$ können wir, auch für den allgemeineren Konnex $M \equiv M_x^{2(m-1)} u_m$ anschreiben; sie ist (cf. Clebsch-Lindemann p. 1003)

$$\Phi' = (m\, m'\, x)\, M_{m''}\, M_x^{2m-3}\, M_x'^{2(m-1)}\, M_x''^{2(m-1)}$$

Um die Symbole a, a' der Formen F und F' einzuführen, machen wir Gebrauch von der aus der Differentialgleichung stammenden Definition: Φ' ist Ort der Wendepunkte der Integralkurven. Da wir die Integralkurven kennen, haben wir nur den Ort der Wendepunkte des Büschels $k\, a_x^m + \lambda\, a_x'^m = 0$ zu bilden. Zu dem Zweck bilde man also die Hessische Kurve $H_{k\lambda}$ der Form $F_{k\lambda} \equiv k\, a_x^m + \lambda\, a_x'^m$, welche sich durch Anwendung des δ-Prozesses auf die Form: $(a\, b\, c)^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, c_x^{m-2}$ in der Form ergibt:

$$H_{k\lambda} \equiv k^3\, H_F + 3\, k^2\, \lambda\, (a\, b\, a')^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, a_x'^{m-2}$$
$$+ 3\, k\, \lambda^2\, (a\, b'\, a')^2\, a_x^{m-2}\, b_x'^{m-2}\, a_x'^{m-2} + \lambda^3\, H_{F'}$$

Durch Elimination der k, λ aus den Gleichungen $F_{k\lambda} = 0$ und $H_{k\lambda} = 0$ erhalten wir die Gleichung der Kurve Φ' in der Gestalt:

$$\Phi' \equiv f'^3\, H_F - 3 f'^2 f\, (a\, b\, a')^2\, a_x^{m-2}\, b_x^{m-2}\, a_x'^{m-2}$$
$$+ 3\, f' f^2\, (a\, b'\, a')^2\, a_x^{m-2}\, b_x'^{m-2}\, a_x'^{m-2} - f^3\, H_{F'} = 0$$

wobei H_F und $H_{F'}$ die Hessischen Formen der Formen F und F' bedeuten. Während im Falle eines allgemeinen Konnexes $(m, 1)$ die Kurve $\Phi' = 0$ die Grundpunkte des Konnexes zu Doppelpunkten hat, ergibt sich hier aus der Gleichungsform von Φ':

Die Wendepunktskurve $\Phi' = 0$ des Konnexes

$$M = (a\,a'\,u)\,a_x^{m-1}\,a_x'^{\,m-1}$$

hat die m^2 Grundpunkte des Konnexes, welche die Basispunkte des Integralkurvensystems bilden, zu dreifachen Punkten, die 3 $(m-1)^2$ Doppelpunkte der Integralkurven zu Doppelpunkten.

Die Kurve $F' = 0$, die Enveloppe der Wendetangenten der Integralkurven, erhält man, indem man die Gleichung der Kurve $M_x^{2(m-1)}\,u_m = 0$ in Linienkoordinaten v aufstellt und sodann $v = u$ setzt; die Kurve wird also von der Klasse $2m\,(2m-3)$.

Übertragen wir diese Ergebnisse nun auf unseren Konnex N, so erhalten wir die Gleichung der Kurve $\Phi' = 0$ in der Gestalt:

$$\Phi' \equiv A_{111}\cdot f'^3 - 3\,A_{112} f'^2 f + 3\,A_{122} f' f^2 - A_{222} f^3 = 0,$$

eine Gleichung, die sich durch Elimination der k, λ aus der Büschelgleichung $k f + \lambda f' = 0$ und deren Diskriminante ergibt, d. h.

Die Wendepunktskurve $\Phi' = 0$ des Konnexes N besteht aus den drei zerfallenden Kegelschnitten des durch die beiden Kegelschnitte $f = 0$ und $f' = 0$ bestimmten Kegelschnittbüschels, sie hat die Basispunkte des Büschels zu dreifachen Punkten und die Doppelpunkte der zerfallenden Kegelschnitte zu Doppelpunkten.

Dieses Resultat ist auch geometrisch einleuchtend, denn als Wendepunkte des Integralkurvensystems kommen nur die Punkte der in Geradenpaare zerfallenden Kegelschnitte in Betracht.

Um die Gleichung der Kurve $F' = 0$ zu erhalten, hat man die Gleichung der Kurve $(a\,a'\,u)\,a_x\,a_x' = 0$ in Linienkoordinaten v aufzustellen. Zu dem Zweck hat man die Diskriminante der binären Form $a_\xi a_\xi' = 0$ zu bilden, welche hier, da $a\,a'$ nicht gleichberechtigte Symbole sind, $\Delta = (ab)\,(a'b') + (a'b)\,(ab')$ wird, das Clebschsche Übertragungsprinzip anzuwenden und erhält so nach Multiplikation mit den entsprechenden Faktoren $(a\,a'\,u)\,(b\,b'\,u)$ für $v = u$:

$$F' \equiv (a\,a'\,u)\,(b\,b'\,u)\,\{(a\,b\,u)\,(a'\,b'\,u) + (a'\,b\,u)\,(a\,b'\,u)\} = G_1 + G_2$$

Zur Umformung dieses Ausdruckes wenden wir zunächst auf das erste Glied G_1 die Identität an:

$$(a\,a'\,u)\,(b\,b'\,u) = (a\,b\,u)\,(a'\,b'\,u) + (b\,a'\,u)\,(a\,b'\,u)$$

so daß

$$G_1 = (a\,b\,u)\,(a'\,b'\,u)\,\{(a\,b\,u)\,(a'\,b'\,u) + (b\,a'\,u)\,(a\,b'\,u)\}$$
$$= F_{11}\,.\,F_{22} + G_1'$$

wird.

Durch Benutzung derselben Identität ergibt sich aus G_1':

$$G_1' = (a\,b'\,u)\,(b\,a'\,u)\,\{(a\,a'\,u)\,(b\,b'\,u) - (a\,b'\,u)\,(b\,a'\,u)\}$$
$$= -F_{12}^2 + G_2'$$

und somit:

$$F' \equiv F_{11}\,.\,F_{22} - F_{12}^2$$

d. h. die Kurve $F' = 0$ zerfällt in die vier Basispunkte des Büschels $kf + \lambda f' = 0$.

Auch dieses Resultat ist geometrisch klar, da F' Enveloppe der Wendetangenten der Integralkurven ist. Wir bemerken hier sogleich, daß die beiden Kurven Φ' und F' dieselbe Kurve in Punkt- und Linienkoordinaten vorstellen; denn stellt man z. B. die Gleichung der Kurve $F' = 0$ in Punktkoordinaten auf, so erhält man die 6 geraden Verbindungslinien der 4 Basispunkte, d. h. die Gleichung $\Phi' = 0$.

Betrachtet man das Kegelschnittbüschel $kf + \lambda f' = 0$, so gehen durch den einem Punkte x vermöge N zugewiesenen Punkte x' auch die Polaren von x in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels, eine geometrische Interpretation der Kombinanteneigenschaft von N. Man kann daher die geometrische Bedeutung von N auch so formulieren: der Konnex N ordnet jedem Punkte seinen konjugierten Pol in Bezug auf das von den beiden Grundkegelschnitten $f = 0$ und $f' = 0$ bestimmten Kegelschnittbüschel zu, jeder Geraden ihren „Polarkegelschnitt“ als Ort der konjugierten Pole ihrer Punkte oder auch als Ort der in Bezug auf die einzelnen Kurven des Büschels genommenen Pole der Geraden.

§ 2.

Die Kurvensysteme X_y und U_v für N.

Der Ort der Punkte x, welche durch ihre Verbindungslinien mit einem festen Punkt y zu Elementen der Hauptkoinzidenz ergänzt werden, bildet für den Konnex $N_x^2 u_n$ eine Kurve 3. Ordnung: $C_3 \equiv N_x^2 (n\,x\,y)$, welche durch den Punkt y hindurchgeht. Die ∞^2 Kurven C_3 der Ebene bilden also ein lineares Netz von Kurven 3ter Ordnung durch die 7 Grundpunkte des Konnexes. Jede dieser Kurven X_y schneidet also auf den durch y gehenden Strahlen deren beide Koinzidenzpunkte aus, geht durch y und berührt daselbst die zum Punkte y gehörige Koinzidenzgerade; diese Gerade schneidet die C_3 noch in einem Punkt y', der ihr zweiter Koinzidenzpunkt ist und in Bezug auf die C_3 der Tangentialpunkt von y ist. Daraus folgt auch: Die 7 Grundpunkte bilden mit den 2 Koinzidenzpunkten einer beliebigen Geraden ein System von 9 Punkten, durch welches noch ein ganzes Büschel von Kurven unseres Netzes hindurchgeht.

Von y aus gehen an die C_3 noch 4 Tangenten, für welche also die beiden Koinzidenzpunkte zusammenfallen; diese Eigenschaft besitzen aber nur die Tangenten von F', also sind die 4 von y ausgehenden Tangenten die Verbindungslinien von y mit den 4 Grundpunkten des Büschels $k f + \lambda f' = 0$, ihre Berührungspunkte natürlich die Grundpunkte selbst. Man hat also hier in einfachster Weise das für die C_3 charakteristische Doppelverhältnis als das Doppelverhältnis der 4 Strahlen von y nach den Basispunkten des Kegelschnittbüschels.

Man überblickt diese Verhältnisse noch auf andere Art, wenn man die Symbole $a\,a'$ in C_3 einführt. Man erhält dann:

$$C_3 \equiv (a\,a'\,\widehat{x\,y})\,a_x a'_x \equiv a_x^2 \cdot a'_x a'_y - a'^2_x \cdot a_x a_y = 0,$$

eine Gleichung, die sich als Eliminationsresultat von k, λ aus den beiden Gleichungen ergibt:

$$k\,a_x^2 + \lambda\,a'^2_x = 0; \qquad k\,a_x a_y + \lambda\,a'_x a'_y = 0$$

d. h. die zu einem Punkte y gehörige Kurve X_y ist das Erzeugnis des Kegelschnittbüschels $kf + \lambda f' = 0$ und des zu ihm projektiven Büschels der Polaren von y in Bezug auf den Kegelschnittbüschel.

Daraus ergibt sich sofort wieder, daß die C_3 durch die 4 Basispunkte des Kegelschnittbüschels und den zu y konjugierten Pol y' hindurchgeht, außerdem durch y selbst; ferner daß die 4 von y ausgehenden Tangenten in den Basispunkten des Büschels berühren und y' der Tangentialpunkt von y ist. Denn die Berührungspunkte der Tangenten von y an die C_3 werden durch die erste Polare von y ausgeschnitten, welche hier ist: $a_x^2 a_y'^2 - a_x'^2 a_y^2 = 0$, d. h. der durch den Punkt y gehende Kegelschnitt des Büschels $kf + \lambda f' = 0$, und beide Kurven berühren sich in der Tangente von y an C_3, welche die zweite Polare von y für C_3 ist, also die Gleichung hat:

$$a_y a_y' (a_x a_y' - a_y a_x') = 0,$$

also in der Tat die Gerade $y\,y'$ ist, welche natürlich auch den durch y gehenden Kegelschnitt des Büschels in y berührt. Auf Grund der projektiven Erzeugung der C_3 kann man nun auch sofort die Tangenten von y' an dieselbe angeben. Denn betrachtet man die zerfallenden Kegelschnitte des Büschels $kf + \lambda f' = 0$, so geht die Polare von y in Bezug auf diese durch deren Doppelpunkte und schneidet somit die ihnen zugeordneten Kegelschnitte in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. die Tangenten von y' an die C_3 sind die Gerade $y\,y'$ und die drei Gerade nach den drei übrigen Grundpunkten des Konnexes. Das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen ist also gleich dem Doppelverhältnis der Strahlen, die von y nach den Basispunkten des Kegelschnittbüschels gehen; oder die Basispunkte des Kegelschnittbüschels bilden ein Punktquadrupel mit y als zugehörigem Tangentialpunkt und das Punktquadrupel von y' besteht aus dem Punkte y und den Diagonalpunkten des Vierecks der Basispunkte. Man hat also von der C_3 sofort 9 Punkte; vertauscht man aber die Rolle der Punkte y und y', so erhält man eine zweite Kurve 3ter Ordnung durch dieselben 9 Punkte

und somit geht durch diese 9 Punkte ein ganzes Büschel von C_3, wie oben auch schon erwähnt.

In dem Netze der Kurven C_3 gibt es unendlich viele mit Doppelpunkt und der Ort der Doppelpunkte besteht aus den drei Geradenpaaren der zerfallenden Kegelschnitte des Büschels $kf + \lambda f' = 0$. (cf. Clebsch-Lindemann, p. 1005.) Aber auch die zu diesen Kurven gehörigen Punktepaare $y\,y'$ liegen auf diesen drei Geradenpaaren. Denn zunächst erfüllen die Punkte y die Kurve F' in Punktkoordinaten; die Gleichung von F' in Punktkoordinaten liefert aber, wie wir schon hervorgehoben, die Kurve Φ'. Liegt aber der Punkt y auf einer Geraden eines zerfallenden Kegelschnittes, so liegt auch y' auf dieser Geraden, er ist der 4te harmonische Punkt zu y bezüglich der beiden auf der Geraden liegenden Basispunkte des Kegelschnittbüschels.

Betrachtet man nun aber die zu einem solchen Punkte y auf einer Geraden eines zerfallenden Kegelschnittes gehörige C_3 näher, so sieht man, daß sie zerfallen muß, denn sie hat mit dieser Geraden nun 5 Punkte gemeinsam, die drei auf der Geraden liegenden Ecken des vollständigen Vierecks der Basispunkte des Kegelschnittbüschels und das Punktepaar $y\,y'$. Also:

Die zu einem Punkte einer Seite des von den Basispunkten des Büschels $kf + \lambda f' = 0$ gebildeten vollständigen Vierecks gehörige C_3 zerfällt in diese Seite selbst und in einen Kegelschnitt, der durch die vier nicht auf dieser Seite gelegenen Ecken des vollständigen Vierecks hindurchgeht.

Die Tangenten dieses Kegelschnittes in den beiden Basispunkten, durch die er geht, sind die Verbindungslinien mit y, die Tangenten in den beiden Diagonalpunkten die Strahlen nach y'.

Fällt y in einen Diagonalpunkt des vollständigen Vierecks der Basispunkte, so besteht die zugehörige C_3 aus den beiden durch y gehenden Seiten des Vierecks und der Verbindungsgeraden der beiden übrigen Diagonalpunkte, besitzt also 3 Doppelpunkte.

Ist y ein Basispunkt des Kegelschnittbüschels, so zerfällt die zugehörige C_3 in die drei durch den Basispunkt gehenden Seiten des vollständigen Vierecks, hat also in diesem Punkte einen dreifachen Punkt.

Man sieht, wie die zerfallenden Kegelschnitte des Kegelschnittbüschels, das den Punkten einer Seite des vollständigen Vierecks außer dieser Geraden selbst entspricht, den Ecken des vollständigen Vierecks auf dieser Seite zugeordnet sind.

Die Kurven

$$U_v \equiv (a\,a'\,u)\,(a\,u\,v)\,(a'\,u\,v) = 0$$

werden umhüllt von den Koinzidenzstrahlen der Punkte von v und bilden ein System von Kurven 3ter Klasse mit v als Doppeltangente; die beiden Berührungspunkte von v sind die Koinzidenzpunkte von v und ihre Gleichung: $(a\,a'\,v)\,(a\,u\,v)\,(a'\,u\,v) = 0$. In Rücksicht auf die zweite Definition des Konnexes N kann man dies auch so aussprechen:

Die Enveloppe der Verbindungslinien konjugierter Pole in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel, deren einer eine Gerade v beschreibt, ist eine Kurve 3ter Klasse, welche die Gerade v zur Doppeltangente hat und sie in den Punkten berührt, in welchen sie von dem zu ihr gehörigen Polarkegelschnitt $(a\,a'\,v)\,a_x\,a'_x = 0$ geschnitten wird. Die Kurve ist also mit ihren Tangenten eindeutig auf die Punkte des Polarkegelschnittes bezogen.

Die Kurve U_v ist in der Tat vom Geschlechte Null; sie ist von der Ordnung 4, hat also mit v keinen weiteren Punkt gemeinsam, wie auch aus dem obigen klar, und muß mit Rücksicht auf die Plückerschen Formeln drei Rückkehrpunkte besitzen. Auf Grund der früher angegebenen Eigenschaft der Koinzidenzpunkte kann man U_v auch betrachten als Enveloppe der Tangenten der Kegelschnitte, die in dem Büschel $kf + \lambda f' = 0$ zu den Punkten des Polarkegelschnitts von v gehören, oder als Enveloppe der Tangenten der Kegelschnitte des Büschels, die zu den Punkten von v gehören.

Von jedem Basispunkte des Büschels $kf + \lambda f' = 0$ gehen an U_v 3 Tangenten, welchen als Geraden durch diesen Basispunkt zwei in den Basispunkt fallende Koinzidenzpunkte entsprechen. Andrerseits müssen diesen Geraden als Tangenten von U_v zwei weitere Koinzidenzpunkte entsprechen, die Schnittpunkte mit v und deren konjugierte Pole. Dies ist nur möglich für die durch die Basispunkte gehenden Seiten des von den Basispunkten gebildeten vollständigen Vierecks, denn diesen Geraden allein unter allen Geraden durch die Basispunkte kommen mehr als ein Koinzidenzpunkt zu, nämlich als Bestandteilen zerfallender Kegelschnitte unendlich viele, d. h. also:

Alle Kurven U_v berühren die 6 Seiten des von den Basispunkten des Kegelschnittbüschels $kf + \lambda f' = 0$ gebildeten vollständigen Viereckes.

Geht die Gerade v durch einen Diagonalpunkt des Vierecks der Basispunkte, so zerfällt die U_v in diesen Basispunkt und einen Kegelschnitt, der die vier nicht durch diesen Diagonalpunkt gehenden Seiten des Vierecks berührt.

Geht die Gerade v durch einen der Basispunkte des Kegelschnittbüschels, so sondert sich von der zugehörigen Kurve U_v dieser Basispunkt zunächst ab; aber der restierende Kegelschnitt, der die drei nicht durch diesen Basispunkt gehenden Seiten des vollständigen Vierecks der Basispunkte berührt, geht durch den betreffenden Basispunkt und berührt in ihm die Gerade v und den daselbst ebenfalls berührenden Polarkegelschnitt von v, so daß man sagen kann, die zu einer Geraden v, welche durch einen Basispunkt geht, gehörige Kurve U_v ist ein Kegelschnitt, welcher die Gerade v in dem Basispunkt zur Tangente hat.

Fällt die Gerade v mit einer Seite des vollständigen Vierecks der Basispunkte zusammen, so besteht die zugehörige Kurve U_v aus den beiden auf ihr liegenden Basispunkten und dem auf ihr liegenden Diagonalpunkt des Vierecks.

Ist die Gerade v Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks, so zerfällt die zugehörende U_v in die drei Diagonalpunkte des Vierecks.

§ 3.

Das Netz der Polarkegelschnitte und der zu N konjugierte Konnex.

Setzt man die beiden Fundamentalkegelschnitte $f = 0$ und $f' = 0$ in der kanonischen Form voraus:

$$f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 a_x^3 = 0; \qquad f' \equiv a_1' x_1^2 + a_2' x_2^2 + a_3' x_3^2 = 0$$

so wird der Konnex N von der Form:

$$N \equiv (a_2 a_3' - a_3 a_2') u_1 x_2 x_3 + (a_3 a_1' - a_1 a_3') u_2 x_3 x_1 + (a_1 a_2' - a_2 a_1') u_3 x_1 x_2$$

d. h. die Polarkegelschnitte aller Geraden der Ebene bilden ein Kegelschnittnetz durch die Ecken des gemeinsamen Polardreieckes der Fundamentalkegelschnitte.

Durch die beiden Koinzidenzpunkte einer Geraden ist also der zugehörige Polarkegelschnitt vollkommen bestimmt.

Betrachtet man zwei Gerade v und w, so schneiden sich ihre beiden Polarkegelschnitte außer in den Ecken des Polardreiecks noch in einem Punkte, welcher der konjugierte Pol y' zu dem Schnittpunkte y der beiden Geraden v und w ist. Dreht sich die Gerade w um den Schnittpunkt y mit v, so muß der ihr zugehörige Polarkegelschnitt immer durch y' gehen und wenn man die Schnittpunkte desselben mit w betrachtet, so hat man für die zu einem Punkte y gehörige Kurve X_y die folgende Erzeugung: Die Kurve X_y ist das Schnittgebilde des Strahlenbüschels y mit dem zu ihm projektiven Kegelschnittbüschel der Polarkegelschnitte der Strahlen durch y.

Die Geraden, welche von ihrem Polarkegelschnitt berührt werden, gehen durch einen der Basispunkte des Büschels $kf + \lambda f' = 0$, wie wir schon gesehen haben.

In dem Netz der Polarkegelschnitte gibt es einfach unendlich viele Kurven mit Doppelpunkt; die Doppelpunkte sind gegeben durch die Gleichungen: $\frac{\partial N}{\partial x_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3.$

Um den Ort der Doppelpunkte und die Enveloppe der zugehörigen Geraden zu bestimmen, verwenden wir am einfachsten die kanonische Form von N, unter deren Zugrundelegung wir aus den 3 Gleichungen $\frac{\partial N}{\partial x_i} = 0$ durch Elimination der x erhalten:

$$2\,(a_2 a_3' - a_3 a_2') \cdot (a_3 a_1' - a_1 a_3') \cdot (a_1 a_2' - a_2 a_1') \cdot u_1 u_2 u_3 = 0$$

und durch Elimination der u:

$$2\,(a_2 a_3' - a_3 a_2') \cdot (a_3 a_1' - a_1 a_3') \cdot (a_1 a_2' - a_2 a_1') \cdot x_1 x_2 x_3 = 0$$

d. h. die Enveloppe der Geraden, deren Polarkegelschnitte in ein Geradenpaar zerfällt, besteht aus den drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von $f = 0$ und $f' = 0$.

Der Ort der Doppelpunkte der zerfallenden Polarkegelschnitte besteht aus den drei Seiten des gemeinsamen Polardreieckes von $f = 0$ und $f' = 0$.

Geht die Gerade u durch einen der Eckpunkte des Polardreiecks, so entspricht ihr ein zerfallender Polarkegelschnitt, der aus der Gegenseite der betreffenden Ecke und einer bestimmten Geraden u' besteht, welche durch dieselbe Ecke geht und sogleich näher charakterisiert werden soll.

Fällt u mit der Verbindungslinie zweier Basispunkte des Kegelschnittbüschels zusammen, so zerfällt der zugehörige Polarkegelschnitt in diese Verbindungslinie selbst und die Gegenseite der Polarecke, durch welche u geht.

Fällt u mit einer Seite des Polardreiecks zusammen, so besteht der zugehörige Polarkegelschnitt aus den beiden anderen Seiten des Polardreieckes.

Man sieht, während die Gerade u sich um einen Eckpunkt des Polardreieckes dreht, beschreibt der ebenfalls durch diese Ecke gehende Strahl u' des zugehörigen Polarkegelschnittes ein zu u projektives Büschel und die Doppelstrahlen der beiden Büschel sind die von jener Ecke ausgehenden Geraden des zerfallenden Kegelschnitts des Kegelschnittbüschels. Die beiden Strahlenbüschel sind aber auch involutorisch, wie sich aus dem

Verhalten der beiden durch die Ecke gehenden Seiten des Polardreiecks ergibt. Die Gerade u' ist also der vierte harmonische Strahl zu u bezüglich der beiden durch die Ecke gehenden Seiten des vollständigen Vierecks der Basispunkte.

Daraus ergibt sich auch, daß die Enveloppe der Linienpaare der zerfallenden Polarkegelschnitte aus den drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks besteht.

Der zu N konjugierte Konnex hat die Ordnung 2 und die Klasse 4. Da nun für die konjugierten Konnexe aller Konnexe $(m, 1)$ die einem Punkte y zugeordnete Klassenkurve aus den m^2 Basispunkten des Büschels von Kurven m^{ter} Ordnung, welche den durch y gehenden Geraden u entsprechen, besteht, so werden also dem Punkte y vermöge des zu N konjugierten Konnexes die vier Basispunkte des Büschels von Polarkegelschnitten entsprechen, die zu den Strahlen durch y gehören. Da aber alle ∞^2 Polarkegelschnitte durch drei dieser Punkte, die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von $f = 0$ und $f' = 0$ gehen, so muß sich von dem konjugierten Konnex die Form dieser drei Punkte absondern, so daß dem Punkte y sein in Bezug auf N konjugierter Punkt y' entspricht und jeder Geraden v der Ort der konjugierten Pole der auf ihr liegenden Punkte, d. h. der Konnex N ist zu sich selbst konjugiert.

Um dies auch analytisch zu verifizieren, machen wir von der Bemerkung Gebrauch, daß ein zu sich selbst konjugierter Konnex $f(x, u)$ sich bei Bildung von $f\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = f(y, v)$ bis auf einen Faktor reproduziert. Dies ergibt sich am einfachsten aus der kanonischen Form, welche in der Tat liefert:

$$N(y, v) = 2(a_2 a_3' - a_3 a_2')\cdot(a_3 a_1' - a_1 a_3')\cdot(a_1 a_2' - a_2 a_1')\cdot x_1 x_2 x_3 \cdot N(x, u).$$

Durch die Behandlung von N ist auch N als zu N dual als erledigt zu betrachten.

§ 4.

Der Konnex B_1.

Der Zwischenform $B_1 \equiv a'_\alpha a'_x u_\alpha = 0$ kommt folgende geometrische Bedeutung zu:

Jeder Geraden u ist eine Gerade v zugewiesen, als Ort derjenigen Punkte, deren Polaren in Bezug auf $f' = 0$ zu der Geraden u in Bezug auf $f = 0$ konjugiert sind (cf. Clebsch-Lindemann, p. 296) oder wie man auch sagen kann: Jeder Geraden u ist die Polare in Bezug auf f' ihres Pols in Bezug auf f zugeordnet.

Jedem Punkte x ist der in Bezug auf f genommene Pol y seiner in Bezug auf f' genommenen Polaren zugeordnet.

Die Koordinaten der u zugeordneten Geraden v sind also gegeben durch

$$\varrho\, v_i = a'_\alpha\, a'_i\, u_\alpha$$

und die Koordinaten des x zugewiesenen Punktes y durch die Gleichungen:

$$\sigma\, y_i = a'_\alpha\, a'_x\, a_i;$$

unter Zugrundelegung der kanonischen Form von f und f' erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} \varrho\, v_1 &= 2\, a'_1\, a_2\, a_3\, u_1 & \sigma\, y_1 &= 2\, a'_1\, a_2\, a_3\, x_1 \\ \varrho\, v_2 &= 2\, a'_2\, a_3\, a_1\, u_2 & \sigma\, y_2 &= 2\, a'_2\, a_3\, a_1\, x_2 \\ \varrho\, v_3 &= 2\, a'_3\, a_1\, a_2\, u_3 & \sigma\, y_3 &= 2\, a'_3\, a_1\, a_2\, x_3, \end{aligned}$$

so daß die kanonische Form von B_1 ist:

$$B_1 \equiv 2\,(a'_1\, a_2\, a_3\, x_1\, u_1 + a'_2\, a_3\, a_1\, x_2\, u_2 + a'_3\, a_1\, a_2\, x_3\, u_3),$$

d. h. die in der durch B_1 vermittelten Kollineation sich selbst entsprechenden Punkte sind die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks und die sich selbst entsprechenden Geraden die Seiten des gemeinschaftlichen Polardreiecks von f und f', wie auch geometrisch ersichtlich.

Die Gleichung der Integralkurven des Konnexes B_1 ist:

$$x_1^{\,2\,a_1\,(a_3\,a_2' - a_3'\,a_2)} \cdot x_2^{\,2\,a_2\,(a_1\,a_3' - a_1'\,a_3)} \cdot x_3^{\,2\,a_3\,(a_2\,a_1' - a_2'\,a_1)} = C,$$

so daß unter den Integralkurven, abgesehen von den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks, keine algebraischen enthalten sind, wenn nicht die Koeffizienten a_i, a_i' der kanonischen Formen ganze Zahlen sind. Während im allgemeinen durch jeden Punkt der Ebene eine Integralkurve hindurchgeht, gehen durch die Ecken des Polardreiecks zwei partikuläre Integralkurven hindurch, so daß diese Punkte singuläre Punkte des Integralkurvensystems sind.

Der Konnex B_2 geht aus B_1 durch Vertauschung von f mit f' hervor.

§ 5.

Der Konnex C_1.

Da sich die Form $C_1 = (a\,a'\,u)\,a_\alpha'\,a_x\,u_\alpha$ als Eliminationsresultat von x aus den drei Gleichungen $a_x\,a_y = 0$, $u_x = 0$, $v_x - a_\alpha'\,a_x'\,u_\alpha = 0$ ergibt, so ist vermöge $C_1 = 0$ jeder Geraden u diejenige Gerade zugewiesen, deren Punkte ihre Polaren in Bezug auf f durch den Schnittpunkt von u mit der ihr im Konnex B_1 zugewiesenen Geraden v schicken, oder also der Geraden u ist die Polare des Schnittpunkts von u mit v in Bezug auf f zugeordnet.

Jedem Punkte x ist zugewiesen ein Kegelschnitt, der umhüllt wird von den Geraden u, welche sich mit den ihnen durch den Konnex B_1 zugewiesenen Geraden v auf der Polare von x in Bezug auf f begegnen.

Die Hauptkoinzidenz von C_1.

In der Hauptkoinzidenz sind jedem Punkte zwei Fortschreitungsrichtungen zugewiesen, die Tangenten an seinen zugehörigen Kegelschnitt, jeder Geraden ein Punkt, der Schnittpunkt mit der zugeordneten Geraden. Aus der geometrischen Interpretation von C_1 ergibt sich sofort:

Drei der Grundstrahlen des Konnexes C_1 sind die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f'.

Um die übrigen vier Grundstrahlen zu bestimmen, betrachte man auf der Kurve $f = 0$, welche ja in den Formen B_1 und C_1

bevorzugt ist, die Schnittpunkte mit $f' = 0$. Für eine Tangente u an f in einem solchen Schnittpunkte ist die ihr im Konnex B_1 entsprechende Gerade v die Tangente in diesem Schnittpunkte an f', somit die u vermöge C_1 zugeordnete Gerade u selbst, d. h.:

Die vier übrigen Grundstrahlen des Konnexes C_1 sind die Tangenten an $f = 0$ in den Schnittpunkten mit $f' = 0$.

Das Integralkurvensystem des Konnexes C_1 läßt sich nun zunächst durch rein geometrische Überlegungen angeben. Nämlich vor allem läßt sich ein partikuläres Integral angeben. Betrachtet man nämlich eine beliebige Tangente von f, so ist der ihr zugehörige Koinzidenzpunkt ihr Berührungspunkt, da dieser ihr Pol in Bezug auf f ist und die Polare eines jeden Punkts der Tangente durch ihn hindurchgeht, d. h. $f = 0$ ist als Liniengebilde betrachtet eine partikuläre Integralkurve des Integralkurvensystems. Nun sind aber auf $f = 0$ die vier Tangenten in den Schnittpunkten mit $f' = 0$ als Grundstrahlen ausgezeichnet, welche singuläre Integrale sind und diesen ihren Charakter für alle Integralkurven beibehalten, d. h. das Integralkurvensystem des Konnexes C_1 besteht aus der Schar von Kegelschnitten, welche die vier Tangenten an f in den Schnittpunkten von f mit f' berühren.

Es läßt sich aber die Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz in Linienkoordinaten auch analytisch integrieren. Sie ist:

$$(a\,a'u)\,u_\alpha\,a'_\alpha(a\,u\,du) = 0.$$

Nun besteht aber die Identität:

$$a'_\alpha(a\,u\,du) = a_\alpha(a'u\,du) - u_\alpha(a'a\,du) + du_\alpha(a'a\,u),$$

so daß die Differentialgleichung auch geschrieben werden kann:

$$(a\,a'u)\,u_\alpha\,\{a_\alpha(a'u\,du) - u_\alpha(a'a\,du) + du_\alpha(a'a\,u)\} = 0.$$

Führt man in dem ersten Gliede G dieser Gleichung für a_i die Größen $(bc)_i$ ein, so erhält man nach dem Vertauschungsprinzipe:

$$3\,G = (a'u\,du)(abc)\{(a\,a'u)(ubc) - (ba'u)(uac) - (ca'u)(uba)\}.$$

Diese Klammer verschwindet aber identisch, wie man durch die Substitution von $x_i = (a'u)_i$ in die Identität:

$$a_x(ubc) - u_x(abc) + b_x(auc) - c_x(aub) \equiv 0$$

ersieht, so daß die Differentialgleichung die Gestalt annimmt

$$(aa'u)^2 u_\alpha du_\alpha - u_\alpha^2 (aa'u)(aa'du) = 0$$

oder:

$$\frac{d(u_\alpha^2)}{u_\alpha^2} - \frac{d\{(aa'u)^2\}}{(aa'u)^2} = 0,$$

woraus durch Integration:

$$k u_\alpha^2 + \lambda (aa'u)^2 = 0.$$

Das Integralkurvensystem des Konnexes C_1 besteht aus der Kegelschnittschar $k F_{11} + \lambda F_{12} = 0$, welche also die in den Schnittpunkten von f und f' an f gelegten Tangenten zu Basistangenten hat.

Für den Konnex C_1 (1,2) existieren von den ausgezeichneten Kurven der Hauptkoinzidenz nur die Kurve $F = 0$ als Ort der Punkte, für welche die beiden zugeordneten Koinzidenzstrahlen zusammenfallen, und die Kurve $\Phi = 0$, die Enveloppe dieser zusammenfallenden Geraden. Die Bedeutung dieser Kurven ergibt sich für den Konnex C_1 sogleich aus der zweiten Definition dieser Kurven, welche besagt, daß $F = 0$ Ort der Spitzen der Integralkurven, $\Phi = 0$ Enveloppe der Rückkehrtangenten der Integralkurven ist. Denn da die Integralkurven bereits bekannt sind, sieht man, daß $F = 0$ die Gleichung der vier Basistangenten der Kegelschnittschar darstellen muß und $\Phi = 0$ die Gleichung der drei zerfallenden Kurven der Schar, d. h. die Schnittpunkte dieser vier Basistangenten.

Um die Gleichung der Kurve $F = 0$ analytisch aufzustellen, hat man die Gleichung des Kegelschnittes

$$a'_\alpha a_x (aa'u) u_\alpha = 0$$

in Punktkoordinaten X zu bilden und $X = x$ zu setzen. Führt man für den Augenblick die Abkürzung $a''_i = (aa')_i$, $\beta''_i = (bb')_i$ ein, so erhält man für F zunächst die Form

$$F \equiv a'_\alpha a_x b'_\beta b_x \{(a\beta x)(a''\beta'' x) + (a\beta'' x)(a''\beta x)\}$$

und hieraus durch Wiedereinführung der Symbole $a\,b\,a'b'$:

$$F \equiv a'_\alpha\, a_x\, b'_\beta\, b_x \{(\alpha\beta x)\,[(a\,a'\,b')\,b_x - (a\,a'\,b)\,b'_x]$$
$$+ (a_\beta\, a'_x - a'_\beta\, a_x)\,(b'_\alpha\, b_x - b_\alpha\, b'_x)\} \equiv \sum_1^6 i\, G_i.$$

Um F in den Formen des vollständigen Systems von f und f' auszudrücken, hat man die einzelnen Glieder noch umzuformen. Es wird z. B. G_1 von dem Faktor $b_x^2 = f$ abgesehen:

$$2\,G'_1 = (a\,a'\,b')\,a_x\,(\alpha\beta x)\,\{a'_\alpha b'_\beta - a'_\beta b'_\alpha\}$$
$$= a'_\alpha \cdot a_x\,(\alpha\beta x)\,(\alpha\beta\alpha').$$

Durch Polarisieren von $(\alpha\beta x)^2 = \frac{4}{3}\,A_{111}\cdot c_x^2$ erhält man aber $(\alpha\beta x)\,(\alpha\beta\alpha') = \frac{4}{3}\,A_{111}\cdot c_x\,c_{\alpha'}$, so daß

$$G'_1 = \tfrac{1}{3}\,A_{111}\cdot 2\,a_{\alpha'}\,a_x\cdot c_{\alpha'}\,c_x - \tfrac{1}{3}\,A_{111}\,(a^2_{\alpha'}\,c_x^2 + c^2_{\alpha'}\,a_x^2)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\,A_{111}\,(A_{122}\cdot f + A_{122}\cdot f)$$

wird, d. h.:

$$G_1 = \tfrac{2}{3}\,A_{111}\cdot A_{122}\cdot f^2 - \tfrac{1}{3}\,A_{111}\cdot f\cdot \Phi_{12}.$$

Durch ähnliche Rechnungen erhält man:

$$G_2 = 0$$
$$G_3 = G_6 = \tfrac{1}{3}\,A_{111}\,A_{112}\,f f' - \tfrac{1}{6}\,A_{111}\cdot f\cdot \Phi_{12}$$
$$-\,G_4 = \tfrac{1}{9}\,A^2_{111}\,f'^2$$
$$-\,G_5 = (A^2_{112} - \tfrac{2}{3}\,A_{111}\,A_{122})\,f^2,$$

so daß endlich

$$F \equiv (2\,A_{122}\,f - \Phi_{12})\cdot \tfrac{2}{3}\,A_{111}\,f - (A_{112}\,f - \tfrac{1}{3}\,A_{111}\,f')^2 = 0$$

die Gleichung der vier Tangenten an f in den Schnittpunkten von f mit f' darstellt.

Um die Gleichung der Kurve $\Phi = 0$ zu bilden, hat man die Diskriminante der Schar $k\,u_a^2 + \lambda\,u_{a''}^2 = 0$ zu bilden, welche sich nach dem Taylorschen Satze aus $(\alpha\beta\gamma)^2$ in der Form ergibt:

$$A_{k\lambda} \quad k^3(\alpha\beta\gamma)^2 + 3k^2\lambda(\alpha\beta\alpha'')^2 + 3k\lambda^2(\alpha\beta''\alpha'')^2 + \lambda^3(\alpha''\beta''\gamma'')^2,$$

wobei wieder $\alpha''_i = (a\,a')_i$, $\beta''_i = (b\,b')_i$, $\gamma''_i = (c\,c')_i$ gesetzt ist, und aus $A_{k\lambda} = 0$ und $k\,F_{11} + \lambda\,F_{12} = 0$ $k\,\lambda$ zu eliminieren. Führt man für die $\alpha''_i\ \beta''_i\ \gamma''_i$ wieder die betreffenden Unterdeterminanten ein, so wird z. B.

$$(\alpha\beta\alpha'')^2 = (a_\alpha a'_\beta - a'_\alpha a_\beta)^2 = 2\,A_{111}\,A_{112} - 2\,a_\alpha a'_\alpha a_\beta a'_\beta$$

und durch Anwendung der bekannten Prinzipien auf das zweite Glied erhält man:

$$(\alpha\beta\alpha'')^2 = \tfrac{4}{3}\,A_{111}\,A_{112}.$$

Ähnlich:

$$(\alpha\beta\gamma)^2 = \tfrac{4}{3}\,A_{111}^2$$
$$(\alpha\beta''\alpha'')^2 = \tfrac{1}{3}\,A_{111}\,A_{122} + A_{112}^2$$
$$(\alpha''\beta''\gamma'')^2 = \tfrac{3}{2}\,A_{112}\,A_{122} - \tfrac{1}{6}\,A_{111}\,A_{222}.$$

Also ist

$$\Phi \equiv \tfrac{4}{3}\,A_{111}^2 \cdot F_{12}^3 - 4\,A_{111}\,A_{112} \cdot F_{12}^2\,F_{11}$$
$$+ (A_{111}A_{122} + 3A_{112}^2)\,F_{12} \cdot F_{11}^2 - (\tfrac{3}{2}\,A_{112}A_{122} - \tfrac{1}{6}\,A_{111}A_{222})\,F_{11}^3 = 0$$

die Gleichung der sechs Schnittpunkte der vier Tangenten an f in den Schnittpunkten von f mit f'. Die Kurve $\Phi = 0$ hat die vier Grundstrahlen des Konnexes, welche Tangenten von f sind, zu dreifachen Tangenten, die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks nach der allgemeinen Theorie zu Doppeltangenten.

Diese letzte Beziehung ist auch geometrisch klar, denn nach der Polarentheorie schneiden sich die Tangenten in den gemeinsamen Schnittpunkten von f und f' an jede der beiden Kurven paarweise auf den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks.

§ 6.

Die Kurvensysteme U_v und X_y für den Konnex C_1.

Die Kurven U_v sind definiert als Enveloppe derjenigen Geraden u, welche durch ihre Schnittpunkte mit der Geraden v zu Elementen der Hauptkoinzidenz ergänzt werden. Ihre Gleichung ist für den Konnex C_1:

$$U_v \equiv (a\,a'\,u)\,u_\alpha\,(a\,u\,v)\,a'_\alpha = 0.$$

Diese Kurven dritter Klasse stellen ein Gewebe von Kurven dritter Klasse vor, welche die 7 Grundstrahlen des Konnexes berühren. Die zu einer festen Geraden v gehörige U_v hat v

zur einfachen Tangente und berührt v in ihrem Koinzidenzpunkte, dessen Gleichung $(a\,a'\,v)\,v_a\,(a\,v\,u)\,a'_a = 0$ ist. Von dem Koinzidenzpunkte von v geht außer der Geraden v an U_v noch eine Tangente v', welche den zu diesem Punkte gehörigen zweiten Koinzidenzstrahl vorstellt. Durch zwei beliebige Gerade der Ebene wird aus dem Gewebe der Kurven U_v eine einzige bestimmt, ausgenommen den Fall, daß die beiden Geraden denselben Koinzidenzpunkt besitzen, d. h. durch die 7 Grundstrahlen und die einem beliebigen Punkte entsprechenden 2 Koinzidenzstrahlen ist noch ein ganzes Büschel von Kurven U_v bestimmt.

Die der Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz analoge Form der Gleichung der Kurve U_v legt es nahe, auf U_v die entsprechende Transformation anzuwenden. Man erhält so, indem man in den früheren Identitäten du durch v ersetzt, für U_v zunächst die Gestalt:

$$U_v \equiv (a\,a'\,u)\,u_a\,\{a_a\,(a'\,u\,v) - u_a\,(a'\,a\,v) + v_a\,(a'\,a\,u)\},$$

in welcher das erste Glied wieder identisch verschwindet, so daß man hat

$$0 = -\,U_v \equiv (a\,a'\,u)\,u_a\,\{(a\,a'\,u)\,v_a - u_a\,(a\,a'\,v)\}$$

und in dieser Form erkennt man U_v als Eliminationsresultat von $k\,\lambda$ aus den beiden Gleichungen:

$$k\,u_a^2 + \lambda\,(a\,a'\,u)^2 = 0$$

$$k\,u_a\,v_a + \lambda\,(a\,a'\,u)\,(a\,a'\,v) = 0,$$

d. h. die zu einer Geraden v gehörige Kurve U_v kann als Erzeugnis der Kegelschnittschar, welche die vier Tangenten an f in den Schnittpunkten mit f' zu Basistangenten hat, und der zu ihr projektiven Punktreihe v'' der Pole von v in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte der Schar betrachtet werden.

Aus dieser Erzeugungsart folgt, daß die U_v die 4 Basistangenten der Schar zu Tangenten hat, außerdem die Gerade v'' der Pole von v. Diese Gerade v'' ist aber identisch mit der der Geraden v durch U_1 zugewiesenen Geraden v'; denn die Gleichung von v'' ist:

$$v_x'' \equiv v_\alpha (a\, a'\, v)\, \{a_x a_\alpha' - a_x' a_\alpha\} = 0,$$

deren zweites Glied identisch verschwindet, so daß

$$v_x'' \equiv v_\alpha (a\, a'\, v)\, a_\alpha' a_x = 0$$

wird. Hieraus ergibt sich für den Konnex C_1 eine neue, geometrisch übersichtlichere Interpretation:

Durch den Konnex C_1 ist jeder Geraden u eine Gerade u' zugeordnet, welche der Ort der Pole der Geraden u in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte derjenigen Schar vorstellt, welche durch die vier Tangenten an f in den Schnittpunkten von f mit f' bestimmt ist, die zu u konjugierte Gerade u' hinsichtlich der genannten Schar.

Jedem Punkte x ist der Kegelschnitt zugeordnet, der umhüllt wird von den konjugierten Polaren der Geraden des Strahlenbüschels x, oder auch von den Polaren des Punktes x in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte jener Schar.

Durch diese neue Interpretation des Konnexes C_1 ist dieser in ein gewisses Dualitätsverhältnis zu dem Konnex N gebracht, das sich in allen folgenden Betrachtungen widerspiegelt.

Die der Geraden v durch C_1 zugewiesene Gerade v' ist also die Tangentialgerade von v bezüglich der zugehörigen U_v. Die 4 weiteren Schnittpunkte von v mit U_v sind als Punkte, deren Koinzidenzstrahlen zusammenfallen, die Schnittpunkte von v mit den vier auf f ausgezeichneten Tangenten und die Tangenten in diesen Punkten sind eben jene Basistangenten selbst. Das für die Kurve U_v charakteristische Doppelverhältnis ist also das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte von v mit den vier Basistangenten von f. Durch Betrachtung der drei zerfallenden Kegelschnitte der Schar findet man, daß die vier Schnittpunkte von v' mit U_v die Punkte sind, in welchen v' die Gerade v und die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' schneidet.

In dem Gewebe der Kurven U_v existieren unendlich viele mit Doppeltangenten; die Enveloppe der Doppeltangenten dieser

Kurven ist die Kurve $\Phi = 0$, besteht also hier aus den 6 Schnittpunkten der vier Basistangenten von f. Gleichzeitig gehen aber auch die Geraden, welchen solche Kurven mit Doppeltangenten zukommen, durch einen der sechs Schnittpunkte der vier Basistangenten von f. Denn sie müssen die Kurve $F = 0$ umhüllen, welche aber natürlich in Linienkoordinaten auf $\Phi = 0$ führt. Wenn aber eine Gerade v durch einen dieser 6 Punkte hindurchgeht, so muß sich von der zugehörigen U_v dieser Punkt abspalten, da sie mit diesem Punkte als Liniengebilde betrachtet 5 Tangenten gemeinsam hat, die beiden durch den Punkt gehenden Basistangenten und die durch ihn gehende Seite des gemeinsamen Polardreiecks von f und f', sowie die Gerade v und die Gerade v', welche die vierte harmonische Gerade zu v bezüglich der beiden Basistangenten ist. Also hat man:

Die zu einer durch einen der sechs Schnittpunkte der vier Basistangenten von f gehenden Geraden gehörige U_v zerfällt in diesen Punkt selbst und in einen Kegelschnitt, der die beiden nicht durch diesen Punkt gehenden Basistangenten und die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' berührt.

Die zu diesem Schnittpunkte gehörige U_v besitzt also zwei Doppeltangenten, die Tangenten von dem Punkte an den genannten Kegelschnitt. Die Berührungspunkte des Kegelschnittes mit den beiden bezeichneten Basistangenten werden durch die Geraden v ausgeschnitten, die Berührungspunkte auf den beiden Seiten des Polardreiecks durch die Gerade v'.

Ist v eine Seite des gemeinsamen Polardreiecks von f und f', so zerfällt die zugehörige U_v in die Gegenecke des Polardreiecks und die beiden auf dieser Seite liegenden Schnittpunkte der vier Basistangenten, die U_v hat also drei Doppeltangenten.

Ist v eine der vier Basistangenten von f selbst, so besteht die zugehörige U_v aus den drei auf der Basistangente liegenden Ecken des vollständigen Vierseits der Basistangenten, und hat also diese Tangente zur dreifachen Geraden.

Die Kurven

$$X_y \equiv a'_\alpha (a_x a'_y - a'_x a_y)(a\,x\,y)\,a_x = 0$$

stellen den Ort der Koinzidenzpunkte des Strahlenbüschels y vor und bilden ein System von Kurven dritter Ordnung mit y als Doppelpunkt; die Tangenten des Doppelpunktes sind die beiden Koinzidenzstrahlen von y und ihre Gleichung:

$$a'_\alpha (a_y a'_x - a'_y a_x)(a\,y\,x)\,a_y = 0.$$

Die Kurven sind also rational und gemäß unserer letzten Interpretation von C_1 kann man sagen:

Der Ort der Schnittpunkte konjugierter Polaren in Bezug auf eine Kegelschnittschar, deren eine sich um einen Punkt y dreht, ist eine Kurve 3. Ordnung, welche y zum Doppelpunkt hat und dessen beide Tangenten die von dem Punkt y an den zugehörigen Polarkegelschnitt gehenden Tangenten sind. Die Kurve X_y ist also mit ihren Punkten eindeutig auf die Tangenten der Kurve $(a\,a'u)\,u_\alpha a'_\alpha a_y = 0$ bezogen.

Man kann auch sagen, die Kurve X_y ist der Ort der Berührungspunkte der Kegelschnitte, welche in der Schar

$$k\,F_{11} + \lambda\,F_{12} = 0$$

den einzelnen Tangenten des Polarkegelschnittes von y zugehören, oder X_y ist Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die von dem Punkte y an die Kegelschnitte der Schar gezogen werden können. Aus dieser letzten Erzeugungsweise ergibt sich, wenn man die zerfallenden Kurven der Kegelschnittschar ins Auge faßt, sofort:

Die Kurven X_y gehen durch die sechs Ecken des von den vier Basistangenten von f gebildeten vollständigen Vierseits.

Liegt y auf einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks von f und f', so zerfällt die zugehörige Kurve X_y in diese Seite und in einen Kegelschnitt, der durch die vier nicht auf dieser

Seite liegenden Schnittpunkte der vier Basistangenten von f hindurchgeht.

Liegt der Punkt y auf einer der vier Basistangenten, so spaltet sich von der zugehörigen X_y nach der Definition eines Grundstrahls diese Basistangente ab; der übrig bleibende Kegelschnitt, der durch die drei nicht auf dieser Basistangente gelegenen Ecken des vollständigen Vierseits der Basistangenten hindurchgeht, berührt aber jene Basistangente und zwar in dem Punkte y und berührt somit auch den in demselben Punkte berührenden Polarkegelschnitt von y, so daß man also sagen kann, die zu einem Punkte y auf einer der Basistangenten gehörige Kurve X_y ist ein Kegelschnitt, der die Basistangente in dem Punkte y berührt.

Fällt y mit einer Ecke des vollständigen Vierseits der Basistangenten zusammen, so zerfällt die zugehörige X_y in die beiden durch y gehenden Basistangenten und die durch diesen Punkt gehende Seite des gemeinsamen Polardreiecks von f und f'.

Ist y eine Ecke des gemeinsamen Polardreiecks von f und f', so besteht die zugehörige X_y aus den drei Seiten des gemeinsamen Polardreiecks.

Den Punkten einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks entspricht also ein Kegelschnittbüschel, abgesehen von dieser Seite selbst, und die zerfallenden Kurven des Büschels sind den auf dieser Seite liegenden Ecken des vollständigen Vierseits der Basistangenten und den Ecken des Polardreiecks zugeordnet. Den Punkten einer Basistangente entspricht ein Kegelschnittsystem (∞^1), abgesehen von der Basistangente selbst, und die drei zerfallenden Kurven dieses Systems gehören zu den drei auf der Basistangente liegenden Ecken des vollständigen Vierseits der Basistangenten.

§ 7.

Das Gewebe der Polarkegelschnitte und der zu C_1 konjugierte Konnex.

Aus der kanonischen Form von f und B_1 ergibt sich die kanonische Form von C_1 in der Gestalt:

$$C_1 \equiv 2\{a_1^2(a_2' a_3 - a_3' a_2) x_1 u_2 u_3 + a_2^2(a_3' a_1 - a_1' a_3) x_2 u_3 u_1 + a_3^2(a_1' a_2 - a_2' a_1) x_3 u_1 u_2\},$$

d. h. die durch den Konnex C_1 den Punkten der Ebene zugewiesenen Kegelschnitte, die Polarkegelschnitte in Bezug auf die Schar $k F_{11} + \lambda F_{12} = 0$, bilden ein Gewebe von Kegelschnitten mit den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' als Grundstrahlen.

Aus diesem Gewebe wird durch die beiden, einem Punkte zugewiesenen Koinzidenzstrahlen eine einzige Kurve ausgewählt.

Zwei solche Kurven des Gewebes, zu den Punkten y und z gehörend, haben außer den drei Seiten des Polardreiecks noch eine vierte Tangente gemeinsam, die der Verbindungslinie v der Punkte y und z durch C_1 zugeordnete Gerade v'. Bewegt sich der Punkt z auf dieser Geraden yz, so wird der ihm zugehörige Kegelschnitt immer diese Gerade v' berühren und die zu einer Geraden v gehörige Klassenkurve U_v kann so auch als Enveloppe der Punktreihe v und der zu ihr projektiven Kegelschnittschar, welche durch die der Geraden v zugeordnete Gerade v' aus dem Kegelschnittgewebe ausgeschieden wird, betrachtet werden.

Die Punkte, welche auf dem ihnen zugewiesenen Polarkegelschnitt liegen, bilden die Kurve $F = 0$, d. h. sie liegen auf einer der vier Basistangenten.

In dem Gewebe der Polarkegelschnitte existieren einfach unendlich viele zerfallende Kurven; die Bedingungen dafür sind

$$\frac{\partial C_1}{\partial u_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

und durch Elimination der x bzw. der u aus diesen 3 Gleichungen erhält man die Enveloppe der Doppeltangenten der

zerfallenden Kegelschnitte bzw. den Ort der zugehörigen Punkte. Unter Zugrundelegung der Normalform von C_1 erhält man diese Eliminationsresultate in der Gestalt:

$$16\,a_1^2 a_2^2 a_3^2 (a_2' a_3 - a_3' a_2)(a_3' a_1 - a_1' a_3)(a_1' a_2 - a_2' a_1) \cdot u_1 u_2 u_3 = 0$$
$$16\,a_1^2 a_2^2 a_3^2 (a_2' a_3 - a_3' a_2)(a_3' a_1 - a_1' a_3)(a_1' a_2 - a_2' a_1) \cdot x_1 x_2 x_3 = 0,$$

d. h. der Ort der Punkte, deren zugehörige Kegelschnitte zerfallen, besteht aus den drei Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f'.

Die Enveloppe der Doppeltangenten der zerfallenden Kegelschnitte besteht aus den drei Ecken des gemeinsamen Polardreiecks von f und f'.

Liegt der Punkt x auf einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks, so gehört zu ihm ein zerfallender Kegelschnitt, der aus der Gegenecke jener Seite und einem anderen bestimmten Punkte x' auf dieser betreffenden Seite besteht.

Rückt x in einen Schnittpunkt zweier Basistangenten von f, so besteht der zugehörige Kegelschnitt aus diesem Punkte selbst und der Gegenecke der Polarseite, auf der x liegt.

Fällt x in eine Ecke des Polardreiecks, so besteht der zugehörende Kegelschnitt aus den beiden anderen Ecken des Polardreiecks.

Während also x sich auf einer Seite des gemeinsamen Polardreiecks bewegt, beschreibt der ebenfalls auf dieser Seite liegende Punkt x' des zugehörigen Kegelschnittes eine zu der Punktreihe x projektive Punktreihe, deren Doppelpunkte die auf jener Seite liegenden Schnittpunkte der vier Basistangenten von f sind. Da die beiden Punktreihen überdies involutorisch sind, so ist also der Punkt x' der vierte harmonische Punkt zu x hinsichtlich der beiden auf der Seite liegenden Schnittpunkte der vier Basistangenten von f.

Der Ort der Punktepaare der in Punktepaare zerfallenden Kegelschnitte besteht aus den drei Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f'.

Der zu C_1 konjugierte Konnex ist von der Ordnung 4 und der Klasse 2. Aber für die konjugierten Konnexe der

Konnexe $(1, n)$ besteht die einer Geraden v zugeordnete Ordnungskurve aus den n^2 Basistangenten der Schar von Kurven n^{ter} Klasse, welche den auf v liegenden Punkten x entsprechen. Daher entsprechen der Geraden v vermöge des zu C_1 konjugierten Konnexes die vier Basistangenten der Schar von Kegelschnitten, die zu den Punkten auf v gehören. Da aber alle die ∞^2 Kegelschnitte der Ebene die drei Seiten des gemeinsamen Polardreiecks von f und f' berühren, so wird sich von dem konjugierten Konnexe die Form dieser drei Geraden absondern, so daß der Geraden v wieder die ihr durch C_1 zugewiesene Gerade v' entspricht, d. h.:

Der Konnex C_1 ist zu sich selbst konjugiert.

In der Tat liefert auch:

$$C_1\left(\frac{\partial C_1}{\partial u}, \frac{\partial C_1}{\partial x}\right) = 16\, a_1^2 a_2^2 a_3^2 (a_2' a_3 - a_3' a_2)(a_3' a_1 - a_1' a_3)(a_1' a_2 - a_2' a_1) \cdot C_1(x, u).$$

Da der Konnex C_2 durch Vertauschung von f mit f' aus C_1 hervorgeht und die Konnexe Γ_1 und Γ_2 bzw. den Konnexen C_1 und C_2 dual gegenüberstehen, so ist hiemit die Diskussion der 8 Zwischenformen des vollständigen Systems von f und f' als erledigt zu betrachten.

II. Teil.

Man gelangt zu neuen, zu den beiden Fundamentalkegelschnitten $a_x^2 = 0$ und $a_x'^2 = 0$ in Beziehung stehenden Konnexen, wenn man von dem zu einer Kurve 4. Ordnung C_4 gehörigen Differentiale erster Gattung

$$D = \frac{a_x (c\, x\, dx)}{a_x^3 a_c} \qquad (a_x^4 = 0)$$

ausgeht und die Werte dieses Differentiales D in den Schnittpunkten der Kurve C_4 mit einer Geraden $u_x = 0$ und einer zu dieser benachbarten Geraden $u_x + du_x = 0$ bestimmt, unter der Voraussetzung, daß die Kurve 4. Ordnung in die beiden Kegelschnitte $a_x^2 = 0$ und $a_x'^2 = 0$ zerfällt.

§ 8.

Die biquadratische Gleichung für die Werte des Differentiales D.

A. Harnack gibt in Band 9 der mathematischen Annalen eine Methode an, welche die Darstellung aller auf das Schnittpunktsystem einer Fundamentalkurve beliebiger Ordnung mit einer Geraden bezüglichen Differentiale ermöglicht und welche darin besteht, daß in das zu Grunde liegende Differential vermöge der Bedingung $u_x = 0$ an Stelle der Kurve $a_x^n = 0$ ein Produkt von n Geraden $p_x^{(1)} p_x^{(2)} \dots p_x^{(n)}$ eingeführt wird, deren jede durch je einen der Schnittpunkte von u_x mit a_x^n hindurchgeht, wodurch dann die n Werte, welche das Differential in den Schnittpunkten von a_x^n mit der Geraden $u_x = 0$ und der zu dieser benachbarten Geraden $u_x + du_x = 0$ besitzt, durch n Differentiale sich ausdrücken lassen, von denen jedes längs einer dieser Geraden $p_x^{(i)}$ erstreckt ist und zwar ebenfalls zwischen den Schnittpunkten mit $u_x = 0$ und den Schnittpunkten mit $u_x + du_x = 0$.

Für den Fall der Kurve 4. Ordnung ist daselbst die biquadratische Gleichung für die 4 Werte des Differentiales erster Gattung

$$D = \frac{a_x (c\, x\, dx)}{a_x^3 a_c}$$

in den Schnittpunkten der Kurve $a_x^4 = 0$ mit der Geraden $u_x = 0$ und einer dieser benachbarten Geraden $u_x + du_x = 0$ wirklich aufgestellt und es zeigt sich, daß man zur Bildung dieser Gleichung derjenigen Kovarianten von a_x^4 bedarf, welche nach dem Übertragungsprinzip aus dem vollständigen Formensystem der binären biquadratischen Form entstehen, also der Formen

$$H_x^4 = (a\, b\, u)^2\, a_x^2\, b_x^2$$

$$T_x^6 = (a\, b\, u)^2\, (c\, b\, u)\, a_x^2\, b_x\, c_x^3$$

$$\Sigma = (a\, b\, u)^4$$

$$T = (a\, b\, u)^2\, (a\, c\, u)^2\, (b\, c\, u)^2$$

bzw. der folgenden Kombination dieser Formen $F = \Sigma^3 \quad 6\,T^2$ und $T \cdot f_x^4 - \Sigma \cdot H_x^4$, und daß dann die biquadratische Gleichung die Gestalt besitzt:

$$\tfrac{1}{8}\, D^4 \cdot F - 3\, D^2 (T \cdot f_{\xi^2} f_{\eta^2} - \Sigma \cdot H_{\xi^2} H_{\eta^2}) - 8\, D \cdot T_{\xi^3} T_{\eta^3} + a_\xi^4 \cdot b_\eta^4 = 0,$$

wobei

$$\xi = \widehat{u\,d\,u}, \qquad \eta = \widehat{u\,a}$$

gesetzt ist und unter $f_{\xi^2} f_{\eta^2}$ etc. die durch Polarenbildung aus f_x^4 entstandenen Formen zu verstehen sind.

Unter der Annahme nun, daß die Kurve 4. Ordnung in zwei Kegelschnitte zerfalle, also:

$$f_x^4 = a_x^2 \cdot a_x'^2 = f \cdot f',$$

erhalten wir für diese Kovarianten unter Beibehaltung der im ersten Teil gebrauchten Bezeichnungsweise für das vollständige Formensystem der zwei quadratischen Formen f und f' die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} H_x^4 &= \tfrac{1}{4}\, F_{11} \cdot (f')^2 - \tfrac{1}{6}\, F_{12} f f' + \tfrac{1}{4}\, F_{22} \cdot (f)^2 \\ T_x^6 &= \tfrac{1}{8}\, N \{F_{11} \cdot (f')^2 - F_{22} \cdot (f)^2\} \\ \Sigma &= \tfrac{1}{6}\, F_{12}^2 + \tfrac{1}{2}\, F_{11} F_{22} \\ T &= \tfrac{1}{4}\, F_{11} F_{12} F_{22} - \tfrac{1}{3\,6} (F_{12})^3; \end{aligned}$$

somit:

$$F = \Sigma^3 - 6\, T^2 = \tfrac{1}{8}\, F_{11} F_{22} (F_{12}^2 - F_{11} F_{22})^2;$$

$$\begin{aligned} T \cdot f_x^4 - \Sigma \cdot H_x^4 = &- (\tfrac{1}{3}\, F_{12}^2 + F_{11} F_{22}) (\tfrac{1}{8}\, F_{11} \cdot (f')^2 + \tfrac{1}{8}\, F_{22} \cdot (f)^2) \\ &+ \tfrac{1}{3}\, F_{11} F_{12} F_{22} \cdot f f' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T \cdot f_{\xi^2} f_{\eta^2} - \Sigma \cdot H_{\xi^2} H_{\eta^2} = &- (\tfrac{1}{3}\, F_{12}^2 + F_{11} F_{22}) \{\tfrac{1}{8}\, F_{11} [\tfrac{1}{3}\, a_\xi'^2 b_\eta'^2 + \tfrac{2}{3} (a_\xi' a_\eta')^2] \\ &+ \tfrac{1}{8} F_{22} [\tfrac{1}{3} a_\xi^2 b_\eta^2 + \tfrac{2}{3} (a_\xi a_\eta)^2]\} + \tfrac{1}{3} F_{11} F_{22} F_{12} \{\tfrac{1}{6} a_\xi^2 a_\eta'^2 + \tfrac{4}{6} a_\xi a_\eta \cdot a_\xi' a_\eta' + \tfrac{1}{6} a_\xi'^2 a_\eta^2\} \end{aligned}$$

$$T_{\xi^3} T_{\eta^3} = \tfrac{1}{8} (a\,a'\,u) \left\{ \begin{aligned} & F_{11} [\tfrac{1}{5} a_\eta a_\eta' b_\eta b_\eta' c_\xi c_\xi' + \tfrac{1}{10} (a_\eta a_\xi' + a_\eta' a_\xi)(b_\eta' c_\xi' + 2 (b_\eta' b_\xi')^2) \\ & \qquad + \tfrac{1}{5} a_\xi a_\xi' b_\eta'^2 c_\eta' c_\xi'] \\ - & F_{22} [\tfrac{1}{5} a_\eta a_\eta' b_\eta b_\xi c_\xi^2 + \tfrac{1}{10} (a_\eta a_\xi' + a_\eta' a_\xi)(b_\eta^2 c_\xi^2 + 2 (b_\eta b_\xi)^2) \\ & \qquad + \tfrac{1}{5} a_\xi a_\xi' b_\eta^2 c_\eta c_\xi] \end{aligned} \right\},$$

wobei also wieder gesetzt ist:

$$\xi = \widehat{u\,du}; \qquad \eta = \widehat{u\,a}.$$

Die biquadratische Gleichung für die 4 Werte von D wird nunmehr (wegen der Zahlenfaktoren vergleiche die Darstellung dieser Kovarianten durch die vier Geraden $p_x^{(i)}$, durch welche f_x^4 ersetzt werden kann, bei A. Harnack, Annalen 9, p. 421):

$$0 = \tfrac{1}{6\,4} F_{11} F_{22} \cdot (F_{12}^2 - F_{11} F_{12})^2 \cdot D^4$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} -(\tfrac{1}{3} F_{12}^2 + F_{11} F_{22})[\tfrac{1}{4} F_{11}(a_\xi'^2 b_\eta'^2 + 2(a_\xi' a_\eta')^2) + \tfrac{1}{4} F_{22}(a_\xi^2 b_\eta^2 + 2(a_\xi a_\eta)^2)] \\ +F_{11} F_{12} F_{22}[\tfrac{1}{3} a_\xi^2 a_\eta'^2 + \tfrac{4}{3} a_\xi a_\eta \cdot a_\xi' a_\eta' + \tfrac{1}{3} a_\xi'^2 a_\eta^2] \end{array}\right\} \cdot D^2$$

$$-(a\,a'u)\left\{\begin{array}{l} F_{11}[\tfrac{1}{5} a_\eta a_\eta' b_\eta' b_\xi' c_\xi'^2 + \tfrac{1}{10}(a_\eta a_\xi' + a_\eta' a_\xi)(b_\eta'^2 c_\xi'^2 + 2(b_\eta' b_\xi')^2) \\ \qquad + \tfrac{1}{5} a_\xi a_\xi' b_\eta'^2 c_\eta' c_\xi'] \\ -F_{22}[\tfrac{1}{5} a_\eta a_\eta' b_\eta b_\xi c_\xi^2 + \tfrac{1}{10}(a_\eta a_\xi' + a_\eta' a_\xi)(b_\eta^2 c_\xi^2 + 2(b_\eta b_\xi)^2) \\ \qquad + \tfrac{1}{5} a_\xi a_\xi' b_\eta^2 c_\eta c_\xi] \\ + a_\xi^2 a_\xi'^2 \cdot b_\eta^2 b_\eta'^2. \end{array}\right\} \cdot D$$

Wir behaupten, diese Gleichung vierten Grades für D zerfällt in das Produkt zweier quadratischer Gleichungen.

In der Tat, führen wir unsere Voraussetzung

$$f_x^4 = a_x^2 \cdot a_x'^2$$

in unser Differential D ein, so wird dieses:

$$D = \frac{2\,a_x(c\,x\,d\,x)}{a_x'^2 \cdot a_x a_c + a_x^2 \cdot a_x' a_c'} \qquad (a_x^2 \cdot a_x'^2 = 0).$$

Man sieht, daß dieses Differential in zwei Teile zerfällt, deren einer sich auf den Kegelschnitt $a_x^2 = 0$, deren anderer sich auf den Kegelschnitt $a_x'^2 = 0$ bezieht. Die obige biquadratische Gleichung muß sich also als das Produkt der beiden quadratischen Gleichungen ergeben, durch welche die auf die einzelnen Kegelschnitte bezüglichen Differentialwerte dargestellt werden. Um die biquadratische Gleichung in ihre beiden

Faktoren zu zerfällen, stellen wir die auf die beiden Kegelschnitte bezüglichen Gleichungen auf und zeigen, daß ihr Produkt in der Tat die biquadratische Gleichung ergibt.

Man hat also die quadratische Gleichung aufzustellen, welche die beiden Werte des Differentiales

$$D = \frac{2\,a_x\,(c\,x\,d\,x)}{a_x'^2 \cdot a_x\,a_c} \qquad (a_x^2 = 0)$$

angibt, welche dieses in den Schnittpunkten von $a_x^2 = 0$ mit der Geraden $u_x = 0$ und einer zu dieser benachbarten Geraden $u_x + d\,u_x = 0$ annimmt. Zu dem Zweck schreibt man für a_x^2 den Wert:

$$a_x^2 = p_x^{(1)} \cdot p_x^{(2)} \quad \text{vermöge } u_x = 0;$$

führt man diesen Wert von a_x^2 in das Differential D ein, so läßt sich dieses in zwei Differentiale trennen, von denen jedes längs einer der beiden Geraden $p_x^{(i)}$ erstreckt ist:

$$D_1 = \frac{4\,a_x\,(c\,x\,d\,x)}{a_x'^2 \cdot p_c^{(1)}\,p_x^{(2)}} \quad (p_x^{(1)} = 0); \qquad D_2 = \frac{4\,a_x\,(c\,x\,d\,x)}{a_x'^2 \cdot p_c^{(2)}\,p_x^{(1)}} \quad (p_x^{(2)} = 0),$$

und welche durch die Substitution

$$x = (p^{(i)}\,u), \qquad d\,x = (p^{(i)}\,d\,u)$$

die Form erhalten:

$$D_1 = \frac{4\,p_\xi^{(1)}\,p_\eta^{(1)}}{(a'\,p^{(1)}\,u)^2 \cdot (p^{(2)}\,p^{(1)}\,u)}; \qquad D_2 = \frac{4\,p_\xi^{(2)}\,p_\eta^{(2)}}{(a'\,p^{(2)}\,u)^2 \cdot (p^{(1)}\,p^{(2)}\,u)}$$

wenn wieder gesetzt ist:

$$\xi = \widehat{u\,d\,u}; \qquad \eta = \widehat{u\,a}.$$

Die quadratische Gleichung für D wird also

$$(D - D_1)\,(D - D_2) = 0$$

und man erhält nach Beseitigung den Nenner als Koeffizienten von D^2

$$A_0 = -\,(p^{(1)}\,p^{(2)}\,u)^2 \cdot (a'\,p^{(1)}\,u)^2\,(a'\,p^{(2)}\,u)^2$$

als Koeffizienten von $-D$

$$D_1 + D_2 = 4\{p_\xi^{(1)} p_\eta^{(1)} (a' p^{(2)} u)^2 \cdot (p^{(1)} p^{(2)} u) + p_\xi^{(2)} p_\eta^{(2)} (a p^{(1)} u)^2 (p^{(2)} p^{(1)} u)\}$$

als konstantes Glied:

$$D_1 \cdot D_2 = 16 \cdot p_\xi^{(1)} p_\eta^{(1)} \cdot p_\xi^{(2)} p_\eta^{(2)}.$$

Diese Koeffizienten sind in dem vollständigen Formensystem von a_x^2 und $a_{x'}^2$ auszudrücken, wozu es zufolge ihrer Entstehung genügt, das vollständige Formensystem der entsprechenden binären Formen zu bilden. Unter der Voraussetzung

$$a_x^2 = p_x^{(1)} \cdot p_x^{(2)}$$

wird nun das Formensystem der binären Formen a_x^2 und $a_{x'}^2$:

$$(ab)^2 = -\tfrac{1}{2}(p^{(1)} p^{(2)})^2;$$

$$\vartheta_x^2 = (aa') a_x a'_x = \tfrac{1}{2}\{(p^{(1)} a') p_x^{(2)} a'_x + (p^{(2)} a') p_x^{(1)} a'_x\}$$

$$(\vartheta\vartheta_1)^2 = \tfrac{1}{2}\{(ab)^2 (a'b')^2 - (aa')^2 (bb')^2\} = -\tfrac{1}{2}(p^{(1)} a')^2 (p^{(2)} b')^2.$$

Der Koeffizient von $-D$ ergibt sich als Polare des Ausdrucks:

$$4\{(p_{x'}^{(1)})^2 (a' p^{(2)})^2 (p^{(1)} p^{(2)}) + (p_x^{(2)})^2 (a p^{(1)})^2 (p^{(2)} p^{(1)})\},$$

der sich rational aus den obigen Formen ableiten lassen muß. Als Kovariante zweiter Ordnung, welche in den Koeffizienten von a_x^2 vom dritten Grade und in den Koeffizienten von $a_{x'}^2$ vom ersten Grade ist, kann sie sich nur zusammensetzen aus dem Produkte von $(ab)^2$ und $\vartheta_{x'}^2$. In der Tat erhält man vermöge der Identität:

$$a'_x (p^{(1)} p^{(2)}) - p_x^{(1)} (a' p^{(2)}) + p_x^{(2)} (a' p^{(1)}) = 0:$$

$$-2(ab)^2 \cdot \vartheta_x^2 = (p^{(1)} p^{(2)})^2 \cdot \tfrac{1}{2}\{(p^{(1)} a') p_x^{(2)} a'_x + (p^{(2)} a') p_x^{(1)} a'_x\}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\{(p^{(1)} p^{(2)})(p_x^{(1)})^2 (a' p^{(2)})^2 + (p^{(2)} p^{(1)})(p_x^{(2)})^2 (a' p^{(1)})^2\}.$$

Nach dem Übertragungsprinzip hat man also:

$$-(p^{(1)} p^{(2)} u)^2 = 2 F_{11}$$

$$(p^{(1)} a' u)^2 \cdot (p^{(2)} b' u)^2 = F_{12}^2 - F_{11} F_{22}$$

$$\sum (p_{x'}^{(1)})^2 (p^{(1)} p^{(2)} u)(a' p^{(2)} u)^2 = 4 F_{11} \cdot N_{x'}^2,$$

daher:

$$\sum P_\xi^{(1)} p_\eta^{(1)} (a' p^{(2)} u)^2 (p^{(1)} p^{(2)} u) = 4 F_{11} \cdot \tfrac{1}{2} (a a' u) \{a_\xi a'_\eta + a_\eta a'_\xi\}$$

so daß die quadratische Gleichung für D die Gestalt erhält:

$$\tfrac{1}{8} D^2 \cdot F_{11} (F_{12}^2 - F_{11} F_{22})$$
$$- D \cdot F_{11} \cdot \tfrac{1}{2} (a a' u) \{a_\xi a'_\eta + a'_\xi a_\eta\} + a_\xi^2 b_\eta^2 = 0.$$

Durch Vertauschung von a_x^2 mit $a_x'^2$ erhält man die auf den zweiten Kegelschnitt bezügliche quadratische Gleichung, wobei zu beachten ist, daß dadurch ϑ_x^2 das Vorzeichen wechselt, in der Form:

$$\tfrac{1}{8} D^2 \cdot F_{22} (F_{12}^2 - F_{11} F_{22})$$
$$+ D \cdot F_{22} \cdot \tfrac{1}{2} (a a' u) \{a_\xi a'_\eta + a'_\xi a_\eta\} + a'^2_\xi b'^2_\eta = 0.$$

Das Produkt beider Gleichungen ergibt nun:

$$\tfrac{1}{64} D^4 \cdot F_{11} F_{22} (F_{12}^2 - F_{11} F_{22})^2$$
$$+ D^2 \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{8} (F_{12}^2 - F_{11} F_{22}) [F_{11} \cdot a'^2_\xi b'^2_\eta + F_{22} \cdot a_\xi^2 b_\eta^2] \\ - \tfrac{1}{4} F_{11} F_{22} \cdot (N_\xi N_\eta)^2 \end{array} \right\}$$
$$- \tfrac{1}{2} (a a' u) \{a_\xi a'_\eta + a'_\xi a_\eta\} \cdot [F_{11} \cdot a'^2_\xi b'^2_\eta - F_{22} \cdot a_\xi^2 b_\eta^2] \cdot D$$
$$+ a_\xi^2 b_\eta^2 \cdot a'^2_\xi b'^2_\eta = 0.$$

Diese Gleichung muß also mit der oben aufgestellten biquadratischen Gleichung identisch sein: man sieht, daß das erste und letzte Glied beider Gleichungen bereits übereinstimmen; wir verifizieren hier noch das Übereinstimmen der Koeffizienten von D, weil uns dieser noch weiterhin beschäftigen wird, und zwar bringen wir den Koeffizienten der ersten Gleichung auf die eben erhaltene Gestalt. Zu dem Zweck sind einige Transformationen erforderlich.

Durch Quadrieren der Identität

$$a_\xi (b u a) - b_\xi (a u a) = a_\xi (a b u)$$

erhält man:

$$2 (a_\xi a_\eta)^2 = 2 a_\xi^2 b_\eta^2 - a_\xi^2 \cdot F_{11};$$

analog ist:

$$2\,(a'_\xi\,a'_\eta)^2 = 2\,a'^2_\xi\,b'^2_\eta - a^2_\xi \cdot F_{22};$$

daher

$$2\,F_{11}\,(a'_\xi\,a'_\eta)^2 - 2\,F_{22}\,(a_\xi\,a_\eta)^2 = 2\,F_{11}\,a'^2_\xi\,b'^2_\eta - 2\,F_{22}\,a^2_\xi\,b^2_\eta$$

und also:

$$\tfrac{1}{10}\,N_\xi\,N_\eta\,\{F_{11}\,[b'^2_\eta\,b'^2_\xi + 2\,(b'_\eta\,b'_\xi)^2] - F_{22}\,[b^2_\eta\,c^2_\xi + 2\,(b_\eta\,b_\xi)^2]\}$$
$$= \tfrac{3}{10}\,N_\xi\,N_\eta\,[F_{11}\cdot a'^2_\xi\,b'^2_\eta - F_{22}\cdot a^2_\xi\,b^2_\eta].$$

Um das Glied

$$G_1 = (a\,a'\,u)\,a_\eta\,a'_\eta\,b'_\xi\,b'_\eta\,c'^2_\xi$$

umzuformen, machen wir Gebrauch von der Identität

$$a'_\xi \cdot c'_\eta - a_\xi\,(a'\,c'\,u) = c'_\xi\,a'_\eta$$

und derselben Identität, wenn darin a' durch b' ersetzt wird; dann wird:

$$G_1 = (a\,a'\,u)\,a_\eta\,b'_\xi\,[a'_\xi\,c'_\eta - a_\xi\,(a'\,c'\,u)]\cdot[b'_\xi\,c'_\eta - a_\xi\,(b'\,c'\,u)] = \sum_1^4 {}_i\,H_i.$$

Nun wird:

$$H_1 = (a\,a'\,u)\,a_\eta\,a'_\xi \cdot b'^2_\xi\,c'^2_\eta$$
$$H_3 = \tfrac{1}{2}\,a_\xi\,F_{22}\cdot a^2_\eta\,b'^2_\xi$$
$$H_2 = -\tfrac{1}{2}\,a^2_\xi\,F_{22}\cdot(a\,a'\,u)\,a_\eta\,a'_\xi$$
$$H_4 = +\tfrac{1}{2}\,a^2_\xi\,F_{22}\cdot(a\,a'\,u)\,a_\eta\,a'_\xi;$$

durch entsprechende Umformungen wird das letzte mit F_{11} multiplizierte Glied

$$G_4 = (a\,a'\,u)\,a_\xi\,a'_\xi\,b'^2_\eta\,c'_\xi\,c'_\eta = (a\,a'\,u)\,a_\xi\,a'_\eta \cdot b'^2_\eta\,c'^2_\xi - \tfrac{1}{2}\,a_\xi \cdot F_{22}\cdot a^2_\xi\,b'^2_\eta$$

und somit:

$$G_1 + G_4 = N_\xi\,N_\eta \cdot b'^2_\xi\,c'^2_\eta + \tfrac{1}{2}\,a_\xi\,F_{22}\cdot a^2_\eta\,b'^2_\xi - \tfrac{1}{2}\,a_\xi \cdot F_{22}\cdot a^2_\xi\,b'^2_\eta.$$

In ganz analoger Weise forme man die entsprechenden Glieder, die mit $-F_{22}$ multipliziert sind, um und findet:

$$G'_1 + G'_4 = N_\xi\,N_\eta \cdot b^2_\xi\,c^2_\eta + \tfrac{1}{2}\,a_\xi\,F_{11}\cdot a'^2_\xi\,b^2_\eta - \tfrac{1}{2}\,a_\xi \cdot F_{11}\cdot a'^2_\eta\,b^2_\xi,$$

so daß

$$\tfrac{1}{5}\,F_{11}\,(G_1 + G_4) - \tfrac{1}{5}\,F_{22}\,(G'_1 + G'_4) = \tfrac{1}{5}\,N_\xi\,N_\eta\,[F_{11}\cdot b'^2_\xi\,c'^2_\eta - F_{22}\cdot b^2_\xi\,c^2_\eta]$$

wird und der Koeffizient von D in der Tat die Form erhält:

$$-\tfrac{1}{2}(a\,a'u)\{a_\xi a'_\eta + a'_\xi a_\eta\}\cdot[F_{11}\cdot a'^2_\xi b'^2_\eta - F_{22}\cdot a^2_\xi b^2_\eta].$$

In unserer biquadratischen Gleichung, die wir nunmehr immer in der zweiten Gestalt betrachten wollen, mußte der Koeffizient von D^3 zufolge des Abelschen Theorems verschwinden. Für unsere beiden Fundamentalkegelschnitte folgt daraus folgender Satz:

Die Summe der Differentialwerte, welche das Differential $D = \dfrac{a_x(c\,x\,dx)}{a'^2_x\cdot a_x a_c}$ in den beiden Schnittpunkten von $a^2_x = 0$ mit der Geraden $u_x = 0$ und der zu ihr benachbarten Geraden $u_x + du_x = 0$ annimmt, ist immer entgegengesetzt gleich der Summe der Differentialwerte, welche das Differential $D' = \dfrac{a_x(c\,x\,dx)}{a^2_x\cdot a'_x a'_c}$ in den Schnittpunkten von $a'^2_x = 0$ mit $u_x = 0$ und $u_x + du_x = 0$ besitzt.

Wir betrachten noch einige spezielle Lagen der Geraden u_x.

Ist u_x eine Tangente der Kurve 4. Ordnung, d. h. Tangente von f oder f', so hat sie mit der Kurve zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam. In der Tat verschwindet für diesen Fall der Koeffizient von D^4, so daß die beiden Wurzeln der Gleichung, welche dem Berührungspunkte zugehören, unendlich groß werden, wo auch immer der Drehpunkt $\widehat{u\,du}$ auf der Tangente liegen mag. Während also der Wert des Differentiales D in der ursprünglichen Form in Punktkoordinaten für einen solchen beliebigen Punkt von f oder f' unendlich klein von der ersten Ordnung bleibt, wird in der hier gegebenen Darstellung, wo der Wert von D in Beziehung zu den Größen du_i gesetzt ist, der Wert des Differentiales im Verhältnis zu den Differentialen du_i unendlich groß, sobald u eine Tangente ist, d. h. er wächst bereits um eine unendlich kleine Größe erster Ordnung, sobald die Tangente um eine unendlich kleine Größe zweiter Ordnung geändert wird. Der Koeffizient der höchsten Potenz

von D verschwindet aber auch für eine Gerade, die durch einen der Schnittpunkte von f und f' hindurchgeht. In der Tat gehören auch zu einer solchen Geraden, als durch einen der Doppelpunkte der C_4 hindurchgehend, zwei zusammenfallende Schnittpunkte und für einen solchen Doppelpunkt wird das Differential in seiner Abhängigkeit von den du_i wie in seiner ursprünglichen Abhängigkeit von den dx_i unendlich groß.

Als Wendetangenten der Kurve 4. Ordnung erscheinen hier die Tangenten an die beiden Kegelschnitte in ihren gemeinsamen Schnittpunkten und für diese Gerade, für welche also sowohl $F_{12}^2 - F_{11} F_{22}$ als F_{11} oder F_{22} gleich Null ist, verschwinden die Koeffizienten von D^4 und D^2, so daß also drei Differentialwerte unendlich groß werden und nur ein Differentialwert, dem vierten getrennt liegenden Schnittpunkte entsprechend, endlich bleibt.

Für die eigentlichen Doppeltangenten unserer C_4, welche durch das gleichzeitige Verschwinden von F_{11} und F_{22} definiert sind, müssen sämtliche vier Differentialwerte, welche nunmehr paarweise zusammengehören, unendlich groß werden und zwar unabhängig von den Größen ξ_i und η_i. Und in der Tat verschwinden für diese Werte von u die drei ersten Koeffizienten der Gleichung. Aber auch für die uneigentlichen Doppeltangenten der C_4, als welche die Verbindungslinien der Schnittpunkte von f und f' zu gelten haben, muß dies gelten. Wir werden im nächsten Paragraphen sogleich zeigen, daß für diese Verbindungslinien die Form $N_\xi N_\eta = (a a' u)\{a_\xi a'_\eta + a'_\xi a_\eta\}$ unabhängig von den ξ_i und η_i verschwindet, so daß dann also auch für diese Gerade die Gleichung die geforderte Eigenschaft besitzt.

Der Koeffizient der ersten Potenz von D gibt, gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, daß von den vier Differentialwerten je zwei einander entgegengesetzt gleich werden. Die Gesamtheit der Geraden, welche die Kurve 4. Ordnung dermaßen schneiden, daß für die Differentialwerte ihrer Schnittpunkte diese Beziehung besteht, erfüllen hier die Hauptkoinzidenzen zweier getrennter Konnexe, zu deren Betrachtung wir übergehen.

§ 9.

Der Konnex $P = (a\,a'u)\{a_x a'_\eta + a_\eta a'_x\}$.

Aus der Entstehungsweise des Konnexes P als Polare des Punktes $\eta = \widehat{u\,a}$ in Bezug auf den Kegelschnitt $N_x^2 = (a\,a'u)\,a_x a'_x$ ergibt sich folgende geometrische Bedeutung:

Einer Geraden u wird durch den Konnex P die Polare des Schnittpunktes η der Geraden $u_x = 0$ und $a_x = 0$ in Bezug auf den zu u_x gehörigen Polarkegelschnitt N_x^2 zugewiesen.

Einem Punkte x ist durch den Konnex P ein Kegelschnitt zugeordnet als Enveloppe derjenigen Geraden, deren Schnittpunkt mit $a_x = 0$ harmonisch liegt zu dem Punkte x hinsichtlich des zu den Geraden gehörenden Polarkegelschnittes.

Diese letztere Zuweisung kann man auch unabhängig vom Konnex P folgendermaßen aussprechen: Die Enveloppe der Polaren, die zu den Schnittpunkten einer beliebigen Geraden $a_x = 0$ mit den Geraden eines Strahlenbüschels hinsichtlich des zu dem Strahlenbüschel gehörigen Polarkegelschnittbüschels gehören, ist ein Kegelschnitt.

In der Hauptkoinzidenz des Konnexes P entspricht einer Geraden u_x ein Punkt. Die Hauptkoinzidenz des Konnexes P ist aber die Bedingung dafür, daß die Differentialwerte, welche zu den Schnittpunkten von u_x mit a_x^2 gehören, entgegengesetzt gleich werden, womit gleichzeitig auch die Differentialwerte, die sich auf die Schnittpunkte mit $a_x'^2$ beziehen, entgegengesetzt gleich werden. Man hat demnach den Satz:

Auf jeder Geraden $u_x = 0$ ist, sobald die Gerade a_x festgelegt, d. h. der Punkt $\eta = \widehat{u\,a}$ auf der Geraden bestimmt ist, ein Punkt ξ vorhanden, welcher als Drehpunkt für die Gerade u_x die Eigenschaft besitzt, daß die Differentialwerte, welche zu dem einen wie dem anderen der beiden Fundamentalkegelschnitte gehören, einander entgegengesetzt gleich werden. Dieser Punkt ist der vierte harmonische Punkt zu dem Punkte η in Bezug auf die Doppelpunkte der Invo-

lution, welche auf der Geraden u_x durch die beiden Kegelschnitte bestimmt ist.

Der Konnex P besitzt als Konnex $(1, 2)$ 7 Grundstrahlen. Wir behaupten:

Die 7 Grundstrahlen des Konnexes P, zu welchen also unendlich viele Drehpunkte ξ gehören, bestehen aus der Geraden $a_x = 0$ und den sechs Seiten des vollständigen Vierecks der vier Schnittpunkte von $a_x^2 = 0$ und $a_x'^2 = 0$.

In der Tat wird für die Gerade a_x die ihr durch den Konnex P zugeordnete Gerade unbestimmt und für eine der sechs Viereckseiten zerfällt nach § 3 (p. 16) der Polarkegelschnitt in diese Seite selbst und die Gegenseite der Ecke des gemeinsamen Polardreiecks von a_x^2 und $a_x'^2$, durch welche diese Seite geht, die Polare des Punktes η in Bezug auf den Polarkegelschnitt dieser Seite fällt somit mit dieser Seite zusammen. Wir haben von diesem Resultat, was die 6 Viereckseiten oder uneigentliche Doppeltangenten unserer C_4 betrifft, bereits am Schlusse des vorigen Paragraphen Gebrauch gemacht.

Die Integration der Hauptkoinzidenz des Konnexes P, welche in Linienkoordinaten u von der ersten Ordnung ist, gelingt durch geometrische Überlegungen.

Wir betrachten zu diesem Zweck die beiden ausgezeichneten Kurven F und Φ der Hauptkoinzidenz. Die Kurve $F = 0$, der Ort der Punkte, die auf ihren zugehörigen Kegelschnitten liegen, hat nach allgemeinen Sätzen die sieben Grundstrahlen zu Doppeltangenten (cf. Clebsch-Lindemann, p. 1005). Die Konstruktion der Berührungspunkte (cf. Clebsch-Lindemann, p. 1014) derjenigen sechs Doppeltangenten, welche Seiten des vollständigen Vierecks der Schnittpunkte von a_x^2 und $a_x'^2$ sind, führt in diesem Falle auf die Eckpunkte dieses vollständigen Vierecks zurück. Diese Konfiguration der sechs Doppeltangenten ist nur möglich, wenn die Kurve F diese vier Ecken zu Doppelpunkten hat, d. h. in zwei Kegelschnitte des Büschels $a_x^2 + \lambda a_x'^2 = 0$ zerfällt. Nun muß aber auch noch

die beliebig vorgegebene Gerade $a_x = 0$ Doppeltangente von F sein, d. h.:

Die Kurve F zerfällt in diejenigen beiden Kegelschnitte des Büschels $a_x^2 + \lambda a_x'^2 = 0$, welche die Gerade $a_x = 0$ berühren.

Wir geben hier noch eine analytische Verifikation dieser Behauptung und zwar legen wir dabei die Fundamentalkegelschnitte in der kanonischen Form zu Grunde. Aus der kanonischen Form von N ergibt sich dann zunächst der Konnex P in der Gestalt

$$P = [(31')u_2 x_3 + (12')u_3 x_2]\eta_1 + [(12')u_3 x_1 + (23')u_1 x_3]\eta_2 + [(23')u_1 x_2 + (31')u_2 x_1]\eta_3$$

wobei gesetzt ist:

$$(12') = a_1 a_2' - a_1' a_2 \text{ etc.}$$

Die Kurve F, welche man erhält, wenn man P in Punktkoordinaten X aufstellt und $X = x$ setzt, wird sodann:

$$\begin{aligned} F_4 = {} & x_1^4 a_1^2 (31')(12') + x_1^2 x_2^2 [a_3^2 (12')^2 - a_1^2 (12')(23') - a_3^2 (12')(31')] \\ & + x_2^4 a_2^2 (12')(23') + x_2^2 x_3^2 [a_1^2 (23')^2 - a_2^2 (23')(31') - a_3^2 (23')(12')] \\ & + x_3^4 a_3^2 (23')(31') + x_3^2 x_1^2 [a_2^2 (31')^2 - a_3^2 (31')(12') - a_1^2 (31')(23')] = 0. \end{aligned}$$

Bildet man andererseits:

$$\begin{aligned} 0 = {} & [(a_1 + \lambda_1 a_1') x_1^2 + (a_2 + \lambda_1 a_2') x_2^2 + (a_3 + \lambda_1 a_3') x_3^2] \\ & \cdot [(a_1 + \lambda_2 a_1') x_1^2 + (a_2 + \lambda_2 a_2') x_2^2 + (a_3 + \lambda_2 a_3') x_3^2] \end{aligned}$$

wo λ_1 und λ_2 Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda a_1' & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 + \lambda a_2' & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 + \lambda a_3' & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sind, so erhält man genau die Gleichung $F = 0$.

Allgemein erhält man nach dem letzten Verfahren die Gleichung der Kurve F in der Form:

$$F = (a' b' a)^2 a_x^2 b_x^2 - 2 (a a' a)^2 b_x^2 b_x'^2 + (a b a)^2 a_x'^2 b_x'^2 = 0.$$

Wir sprechen dieses Resultat endlich noch unabhängig von dem Konnex P aus:

Bilden sechs Doppeltangenten einer Kurve vierter Ordnung die Seiten eines vollständigen Vierecks, während eine siebente Doppeltangente allgemeine Lage zu dem Viereck besitzt, so besteht die Kurve 4. Ordnung aus den beiden Kegelschnitten, welche durch die Ecken des vollständigen Vierecks hindurchgehen und die siebente Gerade berühren. Es gibt somit insgesamt nur zehn Doppeltangenten der Kurve 4. Ordnung.

Die Kurve $\Phi = 0$, die Enveloppe der zu den Punkten von $F = 0$ gehörigen zusammenfallenden Richtungen oder die Enveloppe der Rückkehrtangenten der Integralkurven von P, muß nunmehr ebenfalls zerfallen. Sie wird nach allgemeinen Überlegungen (cf. Clebsch-Lindemann, p. 1003) von der 6. Klasse und ihr analytischer Ausdruck ist in den Koeffizienten der beiden Fundamentalkegelschnitte und der Geraden a_x je vom 3. Grad; außerdem muß sie die sieben Grundstrahlen von P zu Doppeltangenten haben und zwar ebenso wie die Kurve F die sechs Seiten des vollständigen Vierecks in völlig gleichberechtigter Weise. Daraus folgt:

Die Kurve $\Phi = 0$ zerfällt in die vier Basispunkte des Kegelschnittbüschels $a_x^2 + \lambda a_x'^2 = 0$ und in die beiden Berührungspunkte der zu der Geraden $a_x = 0$ gehörigen Berührungskegelschnitte dieses Büschels.

Die Gleichung der Kurve Φ ist somit in Linienkoordinaten (cf. § 2, p. 13):

$$\Phi \quad (F_{12}^2 - F_{11} F_{22}) \cdot (a\, a'\, a)(a\, a\, u)(a'\, a\, u) = 0.$$

Die Gleichung der Kurve F in Linienkoordinaten ergibt nach § 8 (vgl. die dortige Form F' p. 33) das Produkt der beiden Kegelschnitte, aus welchen sie besteht, in Linienkoordinaten, multipliziert mit der Gleichung der Doppelpunkte, d. h. mit $F_{12}^2 - F_{11} F_{22}$. Die beiden Kurven F und Φ in Linienkoordinaten haben also diesen Bestandteil gemeinsam, d. h.

es existiert eine Enveloppe der Integralkurven, welche in Linienkoordinaten eben diese Gleichung: $F_{12}^2 - F_{11} F_{22} = 0$ besitzt. In Punktkoordinaten gesprochen heißt dies aber, die singuläre Lösung der Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz besteht aus den sechs Fundamentalstrahlen, welche die Seiten des vollständigen Vierecks der Schnittpunkte von a_x^2 und $a_x'^2$ bilden, wozu, wie aus früheren und allgemeinen Betrachtungen folgt, noch die Gerade $a_x = 0$ hinzukommt. Da nun aber die Gerade a_x, die getrennt auftritt, in Linienkoordinaten nicht darstellbar ist, so besteht der gesamte analytische Ausdruck der singulären Lösung in Linienkoordinaten eben aus dem Ausdruck $F_{12}^2 - F_{11} F_{22}$ und weil bekanntlich (vgl. z. B. Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, deutsche Bearbeitung von A. Harnack, 2. Band, 2. Hälfte, Differentialgleichungen, § 683), wenn μ ein integrierender Faktor einer Differentialgleichung erster Ordnung ist, in dem Ausdruck $\frac{1}{\mu}$ das singuläre Integral enthalten ist, so folgt hier:

Der Ausdruck $\dfrac{1}{F_{12}^2 - F_{11} F_{22}}$ ist ein integrierender Faktor der Differentialgleichung der Hauptkoinzidenz des Konnexes P in Linienkoordinaten, d. h. der Ausdruck

$$\frac{(a\,a'\,u)\{(a\,u\,du)(a'\,u\,a) + (a'\,u\,du)(a\,u\,a)\}}{(a\,a'\,u)^2(b\,b'\,u)^2 - (a\,b\,u)^2(a'\,b'\,u)^2}$$

ist ein totales Differential.

Man kann natürlich auch dieses Resultat analytisch durch eine freilich umständliche Rechnung verifizieren, indem man für die in nicht homogenen Variabeln geschriebene Form des Differentialausdruckes die Bedingung des totalen Differentiales aufstellt.

Um nun die Differentialgleichung wirklich zu integrieren, zerlegen wir die Gleichung der vier Schnittpunkte von f und f' in ihre Linearfaktoren, setzen also

$$F_{12}^2 - F_{11} F_{22} = u_{\pi^{(1)}} \cdot u_{\pi^{(2)}} \cdot u_{\pi^{(3)}} \cdot u_{\pi^{(4)}}$$

und entwickeln eine Partialbruchzerlegung des Quotienten:

$$\frac{(a\,a'\,u)(a\,u\,d\,u)(a'\,u\,\alpha) + (a\,a'\,u)(a'\,u\,d\,u)(a\,u\,\alpha)}{u_{\pi^{(1)}} \cdot u_{\pi^{(2)}} \cdot u_{\pi^{(3)}} \cdot u_{\pi^{(4)}}} = \frac{Z}{N} = \frac{Z}{u_{\pi^{(1)}} \cdot \Pi'}$$

Die Möglichkeit einer Partialbruchzerlegung nach den Linearfaktoren des Nenners ergibt sich nun aus dem Ansatze:

$$\frac{Z}{N} = \frac{a_1}{u_{\pi^{(1)}}} + \frac{Z - a_1 \cdot \Pi'}{u_{\pi^{(1)}} \cdot \Pi'},$$

wo sich nun der Koeffizient a_1 in der Tat so bestimmen läßt, daß

$$Z - a_1 \cdot \Pi' = u_{\pi^{(1)}} \cdot U$$

wird. Dann setzt man:

$$u = (\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}),$$

wo $\pi^{(0)}$ einen beliebigen Punkt bedeute, der nur auf keiner der Seiten des vollständigen Vierecks $\pi^{(1)}\,\pi^{(2)}\,\pi^{(3)}\,\pi^{(4)}$ liegen soll, so erhält man:

$$\begin{aligned}&(a_{\pi 1}\,a'_{\pi 0} - a'_{\pi 1}\,a_{\pi 0})\,(a_{\pi 1}\,du_{\pi 0} - du_{\pi 1}\,a_{\pi 0})\,(a'_{\pi 1}\,a_{\pi 0} - a_{\pi 1}\,a'_{\pi 0})\\ &+ (a_{\pi 1}\,a'_{\pi 0} - a'_{\pi 1}\,a_{\pi 0})\,(a'_{\pi 1}\,du_{\pi 0} - du_{\pi 1}\,a'_{\pi 0})\,(a_{\pi 1}\,a_{\pi 0} - a_{\pi 1}\,a_{\pi 0})\\ &= a_1 \cdot (\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}\,\pi^{(2)})\,(\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}\,\pi^{(3)})\,(\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}\,\pi^{(4)}),\end{aligned}$$

woraus sich unter Berücksichtigung der Beziehung

$$a^2_{\pi^{(i)}} = a'^2_{\pi^{(i)}} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ergibt:

$$a_1 = \frac{2\,a_{\pi^{(1)}}\,(a_{\pi 0}\,a_{\pi 1} \cdot a'^2_{\pi 0} - a'_{\pi 0}\,a'_{\pi 1} \cdot a^2_{\pi 0}) \cdot du_{\pi^{(1)}}}{(\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}\,\pi^{(2)})\,(\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}\,\pi^{(3)})\,(\pi^{(1)}\,\pi^{(0)}\,\pi^{(4)})}.$$

Macht man nun also den Ansatz:

$$\frac{Z}{N} = \frac{a_1}{u_{\pi^{(1)}}} + \frac{a_2}{u_{\pi^{(2)}}} + \frac{a_3}{u_{\pi^{(3)}}} + \frac{a_4}{u_{\pi^{(4)}}},$$

so erhält man durch Anwendung der eben benutzten Methode allgemein für a_i den Wert:

$$a_i = \frac{2\,a_{\pi^{(i)}}\,(a_{\pi 0}\,a_{\pi^i} \cdot a'^2_{\pi 0} - a'_{\pi 0}\,a'_{\pi^i} \cdot a^2_{\pi 0}) \cdot du_{\pi^{(i)}}}{\Pi'(\pi^{(i)}\,\pi^{(0)}\,\pi)},$$

wo in dem Produkte $H' \pi$ alle Werte $\pi^{(1)}$ bis $\pi^{(4)}$ annehmen darf mit Ausnahme des Wertes $\pi^{(i)}$.

Man erhält also das Integral der Differentialgleichung $\frac{Z}{N} = 0$ in der Form

$$\sum_1^4 i \, a_{\pi^{(i)}} \delta^{(i)} \lg u_{\pi^{(i)}} = c$$

und somit die Integralkurven des Konnexes P in der Gestalt:

$$\frac{a_{\pi^{(1)}} \delta^{(1)}}{u_{\pi^{(1)}}} \cdot \frac{a_{\pi^{(2)}} \delta^{(2)}}{u_{\pi^{(2)}}} \cdot \frac{a_{\pi^{(3)}} \delta^{(3)}}{u_{\pi^{(3)}}} \cdot \frac{a_{\pi^{(4)}} \delta^{(4)}}{u_{\pi^{(4)}}} = C,$$

wobei also bedeutet:

$$\delta^{(i)} = \frac{a_{\pi^0} a_{\pi^{(i)}} \cdot a'^2_{\pi^0} - a'_{\pi^0} a'_{\pi^i} \cdot a^2_{\pi^0}}{H' (\pi^{(i)} \pi^{(0)} \pi)}.$$

Daß unsere Partialbruchzerlegung, welche den beliebigen Punkt $\pi^{(0)}$ enthält, eindeutig ist, ersieht man folgendermaßen. Angenommen es existieren zwei solche Zerlegungen, so wäre also

$$\frac{a_1}{u_{\pi^{(1)}}} + \frac{a_2}{u_{\pi^{(2)}}} + \frac{a_3}{u_{\pi^{(3)}}} + \frac{a_4}{u_{\pi^{(4)}}} = \frac{b_1}{u_{\pi^{(1)}}} + \frac{b_2}{u_{\pi^{(2)}}} + \frac{b_3}{u_{\pi^{(3)}}} + \frac{b_4}{u_{\pi^{(4)}}}$$

oder:

$$\frac{a_1 - b_1}{u_{\pi^{(1)}}} \cdot u_{\pi^{(2)}} u_{\pi^{(3)}} u_{\pi^{(4)}}$$

$$= (b_2 - a_2) u_{\pi^{(3)}} u_{\pi^{(4)}} + (b_3 - a_3) u_{\pi^{(2)}} u_{\pi^{(1)}} + (b_4 - a_4) u_{\pi^{(2)}} u_{\pi^{(3)}}.$$

Wählt man nun für u eine beliebige Gerade, die durch den Punkt $\pi^{(1)}$ hindurchgeht, nicht aber gleichzeitig durch einen der übrigen drei Punkte $\pi^{(i)}$, so bleibt für diese die rechte Seite endlich, während die linke Seite der Gleichung unendlich groß würde. Dieser Widerspruch hebt sich nur, wenn auch der Zähler der linken Seite Null wird, d. h. wenn

$$a_1 = b_1$$

ist. Nunmehr folgt ebenso:

$$a_2 = b_2,$$

d. h. allgemein:

$$a_i = b_i.$$

Wir wählen als erstes Beispiel für die Integration der Differentialgleichung des Konnexes P den Fall, daß die beiden Fundamentalkegelschnitte sich in vier reellen Punkten schneiden und verlegen das Koordinatensystem in drei dieser Schnittpunkte, so daß also die Gleichungen der Kegelschnitte die Form besitzen:

$$f = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$
$$f' = 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{13}x_1x_3 + 2a'_{23}x_2x_3 = 0;$$

dann sind also die Koordinaten der Punkte

$$\pi^{(1)}(1, 0, 0); \quad \pi^{(2)}(0, 1, 0); \quad \pi^{(3)}(0, 0, 1)$$

und der vierte Schnittpunkt besitzt die Koordinaten:

$$\pi^{(4)}(ab, -ac, -bc),$$

wenn dabei gesetzt ist:

$$a = (a_{23}a'_{13} - a'_{23}a_{13}),$$
$$b = (a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23}),$$
$$c = (a_{12}a'_{13} - a'_{12}a_{13}).$$

Der integrierende Faktor der Differentialgleichung ist also in diesem Falle:

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot (abu_1 - acu_2 - bcu_3).$$

Wählen wir für den Punkt $\pi^{(\omega)}$ den Einheitspunkt $\pi^{(\omega)}(e, e, e)$, so ergibt sich nun:

$$a_1 = \frac{2a_1 \cdot 2e^3\{(a_{12}+a_{13})(a'_{12}+a'_{13}+a'_{23}) - (a'_{12}+a'_{13})(a_{12}+a_{13}+a_{23})\}}{\begin{vmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & e & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & e & ab \\ 0 & e & -ac \\ 0 & e & -bc \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{4a_1}{c};$$

$$a_2 = -\frac{4a_2}{b}; \quad a_3 = -\frac{4a_3}{a}; \quad a_4 = \frac{4(-abu_1 + acu_2 + bcu_3)}{abc}.$$

Die Differentialgleichung ist also:

$$0 = \frac{a_1}{c} \cdot \frac{du_1}{u_1} - \frac{a_2}{b} \cdot \frac{du_2}{u_2} - \frac{a_3}{a} \cdot \frac{du_3}{u_3}$$
$$+ \frac{-abc_1 + acc_2 + bcc_3}{abc} \cdot \frac{d(abu_1 - acu_2 - bcu_3)}{abu_1 - acu_2 - bcu_3}$$

und die Integralkurven der Hauptkoinzidenz ergeben sich in der Gestalt:

$$(u_1)^{\frac{a_1}{c}} \cdot (abu_1 - acu_2 - bcu_3)^{\frac{-abc_1 + acc_2 + bcc_3}{abc}} = C \cdot (u_2)^{\frac{a_2}{b}} \cdot (u_3)^{\frac{a_3}{a}}.$$

Als zweites Beispiel, welches nicht unter die obige Partialbruchzerlegung fällt, die verschiedene Schnittpunkte der Fundamentalkegelschnitte voraussetzt, betrachten wir noch den Fall der sich doppelt berührenden Kegelschnitte und zwar sei:

$$f = x_1^2 - 2\,x_2 x_3 = 0$$
$$f' = x_1^2 + 2\,x_2 x_3 = 0.$$

Dann wird:

$$N = (a\,a'\,u)\,a_x a'_x = 2\,x_1\,(u_3 x_3 - u_2 x_2),$$

somit:

$$P = (u_3 x_3 - u_2 x_2)\,\eta_1 - u_2 x_1\,\eta_2 + u_3 x_1\,\eta_3,$$

und die zu integrierende Differentialgleichung:

$$Z = du_1 \cdot u_2 u_3 (a_2 u_3 - u_2 a_3) + du_2 \cdot u_3^2 (a_1 u_2 - u_1 a_2)$$
$$+ du_3 \cdot u_2^2 (a_3 u_1 - u_3 a_1) = 0,$$

für welche also nach allgemeinen Betrachtungen das Produkt der Schnittpunkte

$$N = u_2^2 u_3^2$$

ein integrierender Divisor ist. In der Tat schreibt sich die Differentialgleichung nun so:

$$\frac{Z}{N} = a_2 \cdot \frac{u_2\,du_1 - u_1\,du_2}{u_2^2} - a_3 \cdot \frac{u_3\,du_1 - u_1\,du_3}{u_3^2}$$
$$+ a_1 \cdot \left(\frac{du_2}{u_2} - \frac{du_3}{u_3}\right) = 0,$$

woraus man durch Integration erhält:

$$a_2 \cdot \frac{u_1}{u_2} - a_3 \cdot \frac{u_1}{u_3} + a_1 \cdot \lg \frac{u_2}{u_3} = C.$$

§ 10.

Der Konnex $Q = (a\,b\,u)^2\,a_x'^2\,(b'\,u\,a)^2 - (a'\,b'\,u)^2\,a_x^2\,(b\,u\,a)^2.$

Der Koeffizient der ersten Potenz von D in der biquadratischen Gleichung des § 8 zerfiel in zwei Faktoren, deren zweiter, wenn man in ihm an Stelle von ξ x schreibt, den Konnex liefert:

$$Q = (a\,b\,u)^2\,a_x'^2\,(b'\,u\,a)^2 - (a'\,b'\,u)^2\,a_x^2\,(b\,u\,a)^2.$$

Dieser Konnex besitzt die Eigenschaft, daß er nur einfach unendlich viele Ordnungskurven und ebenso nur einfach unendlich viele Klassenkurven enthält: es entspricht jeder Geraden u ein Kegelschnitt des Büschels

$$a_x^2 - \lambda\,a_x'^2 = 0$$

und zwar derjenige, für welchen

$$\lambda = \frac{(a'\,b'\,u)^2\,(b\,u\,a)^2}{(a\,b\,u)^2\,(b'\,u\,a)^2}$$

ist, während jedem Punkte x diejenige Kurve 4. Klasse entspricht, welche aus der Schar

$$(a\,b\,u)^2\,(b'\,u\,a)^2 - \mu\cdot(a'\,b'\,u)^2\,(b\,u\,a)^2 = 0$$

durch den Wert

$$\mu = \frac{a_x^2}{a_x'^2}$$

ausgewählt wird. Es entspricht also je einfach unendlich vielen Punkten x, welche einem Kegelschnitt unseres Kegelschnittbüschels angehören, dieselbe Kurve 4. Klasse und umgekehrt allen den einfach unendlich vielen Geraden u, welche eine Kurve der Kurvenschar 4. Klasse umhüllen, ein und derselbe Kegelschnitt des Kegelschnittbüschels. Insbesondere entspricht den Punkten des Kegelschnittes a_x^2 diejenige Kurve 4. Klasse, welche besteht aus eben diesem Kegelschnitte selbst in Linienkoordinaten und den beiden Schnittpunkten der Geraden a_x mit dem Kegelschnitt $a_x'^2$ und analog den Punkten

des Kegelschnittes $a_x'^2$ dieser Kegelschnitt in Linienkoordinaten zusammen mit den beiden Schnittpunkten der Geraden a_x mit dem Kegelschnitte a_x^2, und umgekehrt.

Die Hauptkoinzidenz des Konnexes Q ist die Bedingung dafür, daß zwischen zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung des § 8 die Relation $D_1 + D_2 = 0$ besteht und zwar ist sie, da die Hauptkoinzidenz des Konnexes P die Bedingung dafür angab, daß diese Relation zwischen den Differentialwerten besteht, die sich auf einen und denselben Kegelschnitt beziehen, die Bedingung dafür, daß diese Relation stattfindet zwischen den Differentialwerten, die zu den beiden Kegelschnitten a_x^2 und $a_x'^2$ gehören. Um eine geometrische Interpretation für die einer Geraden u_x in der Hauptkoinzidenz zugeordneten beiden Drehpunkte zu erhalten, betrachten wir den Konnex:

$$(a\,b\,u)^2\,a_x'^2\,b_x'^2 - (a'\,b'\,u)^2\,a_x^2\,b_x^2 = 0.$$

Dieser Konnex weist jeder Geraden u_x eine Kurve 4. Ordnung zu, welche aus zwei Kegelschnitten des Büschels

$$a_x^2 + \lambda\,a_x'^2 = 0$$

besteht; denn für konstantes u läßt sie sich in der Form schreiben:

$$(a_x'^2 + \lambda_1 \cdot a_x^2)\,(a_x'^2 + \lambda_2 \cdot a_x^2) = 0,$$

wobei λ_1, λ_2 Wurzeln der Gleichung

$$(a\,b\,u)^2\,\lambda^2 - (a'\,b'\,u)^2 = 0$$

sind. Das Produkt der Polaren des Punktes $\eta = \widehat{u\,a}$ in Bezug auf diese beiden Kegelschnitte ist nun

$$(a_x' a_\eta' + \lambda_1 \cdot a_x a_\eta) \cdot (a_x' a_\eta' + \lambda_2 \cdot a_x a_\eta) = (a\,b\,u)^2\,(a_x' a_\eta')^2 - (a'\,b'\,u)^2\,(a_x a_\eta)^2 = 0$$

und wir haben bereits gelegentlich der Umformung des Koeffizienten von D in der biquadratischen Gleichung des § 8 gesehen, daß die Hauptkoinzidenz des Konnexes Q sich auch in dieser Form schreiben läßt. Es folgt also:

Auf jeder Geraden $u_x = 0$ gibt es, wenn die Gerade a_x fest gegeben ist, zwei Punkte ξ, welche als Drehpunkte für die Gerade u_x die Eigenschaft besitzen, daß ein Wert des Differentiales

$$D = \frac{a_x(c\,x\,d\,x)}{a_x'^2 \cdot a_x a_c} \quad (a_x^2 = 0)$$

entgegengesetzt gleich ist einem Werte des Differentiales:

$$D' = \frac{a_x(c\,x\,d\,x)}{a_x^2 \cdot a_x' a_c'} \quad (a_x'^2 = 0).$$

Diese beiden Punkte sind die vierten harmonischen Punkte zu dem Punkte $\eta = \widehat{ua}$ in Bezug auf diejenigen beiden Punktepaare der auf der Geraden u_x durch das Kegelschnittbüschel

$$a_x'^2 + \lambda\, a_x^2 = 0$$

ausgeschnittenen Involution, welche durch die beiden Kegelschnitte bestimmt sind, deren Parameterwerte durch die Gleichung

$$(a\,b\,u)^2\,\lambda^2 - (a'\,b'\,u)^2 = 0$$

gegeben sind.

Die Integration der Hauptkoinzidenz des Konnexes Q ist vermöge dieser Relation $D + D' = 0$ auf die Quadraturen dieser beiden Differentiale D und D' zurückgeführt. Man erhält nämlich daraus durch Integration:

$$\int_{(a_x'^2 = 0)} \frac{a_x(c\,x\,d\,x)}{a_x'^2 \cdot a_x a_c} + \int_{(a_x'^2 = 0)} \frac{a_x(c\,x\,d\,x)}{a_x^2 \cdot a_x' a_c'} = C.$$

Ersetzt man nun in dem Differentiale D die Kurve $a_x'^2$ durch das Produkt zweier Geraden $p_x^{(1)}\, p_x^{(2)}$, welche durch die Schnittpunkte von $a_x'^2 = 0$ mit $a_x^2 = 0$ gelegt sind, was ja unter der Bedingung $a_x^2 = 0$ immer möglich ist, da sich dann eine Konstante λ so bestimmen läßt, daß $a_x'^2 - \lambda\, a_x^2 \equiv p_{(x)}^{(1)} \cdot p_x^{(2)}$ ist, so

ergibt sich der Wert des Integrals von D für einen bestimmten Punkt x des Kegelschnittes $a_x^2 = 0$ nach Harnack, Annalen 9, p. 413 zu:

$$\int_x^x \frac{a_x (c\,x\,dx)}{p_x^{(1)} p_x^{(2)} \cdot a_x a_c} = -\frac{a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^2} \cdot w(p^{(1)}) - \frac{a_\zeta a_\eta}{a_\eta^2} w(p^{(2)}) + \frac{a_\eta}{a_\eta^2} \lg \frac{p_x^{(2)}}{p_x^{(1)}},$$

wobei gesetzt ist

$$\eta = \widehat{p^{(1)} p^{(2)}}; \qquad \zeta = \widehat{p^{(2)} a}; \qquad \vartheta = \widehat{a p^{(1)}}$$

und $w(v)$ das Fundamentalintegral dritter Gattung bedeutet:

$$w(v) = \int \frac{(c\,x\,dx)}{v_x \cdot a_x a_c} \quad \cdot \quad (a_x^2 = 0),$$

dessen auf einen bestimmten Punkt x des Kegelschnittes a_x^2 bezüglicher Wert ist (cf. p. 402):

$$\int_x^x \frac{(c\,x\,dx)}{v_x \cdot a_x a_c} = \sqrt{\frac{-2}{(abv)^2}} \lg \frac{|k\,x\,\eta'|}{|k\,x\,\xi'|} \qquad (a_x^2 = 0, \quad a_k^2 = 0),$$

wobei ξ', η' die Schnittpunkte von v_x mit a_x^2 sind und k ein beliebiger fester Punkt des Kegelschnittes ist. Somit lassen sich die Quadraturen vollständig ausführen und die obige Gleichung wird also:

$$-\frac{a_\vartheta a_\eta}{a_\eta^2} \sqrt{\frac{-2}{(ab\,p^{(1)})^2}} \lg \frac{|k x \xi_2|}{|k x \xi_1|} - \frac{a_\zeta a_\eta}{a_\eta^2} \sqrt{\frac{-2}{(ab\,p^{(2)})^2}} \lg \frac{|k x \xi_4|}{|k x \xi_3|}$$

$$+ \frac{a_\eta}{a_\eta^2} \lg \frac{p_x^{(2)}}{p_x^{(1)}} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{a'_\vartheta a'_\eta}{a_\eta'^2} \sqrt{\frac{-2}{(a'b'p^{(1)})^2}} \lg \frac{|k' x' \xi_2|}{|k' x' \xi_1|} \right.$$

$$\left. + \frac{a'_\zeta a'_\eta}{a_\eta^2} \sqrt{\frac{-2}{(a'b'p^{(2)})^2}} \lg \frac{|k' x' \xi_4|}{|k' x' \xi_1|} - \frac{a_\eta}{a_\eta^2} \lg \frac{p_{x'}^{(2)}}{p_{x'}^{(1)}} \right\} = C.$$

Dabei haben also $\eta\,\zeta\,\vartheta$ die obige Bedeutung; $\xi_i\,(i = 1,2,3,4)$ sind die 4 Schnittpunkte von a_x^2 und $a_x'^2$, x ist ein Punkt des Kegelschnitts $a_x^2 = 0$, x' ein Punkt von $a_x'^2 = 0$, k und k' sind feste Punkte dieser beiden Kegelschnitte und es ist

$$p^{(1)} = \widehat{\xi_1 \xi_2}, \qquad p^{(2)} = \widehat{\xi_3 \xi_4}$$

und λ ist durch die Gleichung $a_x'^2 - \lambda a_x^2 \equiv p_x^{(1)} \cdot p_x^{(2)}$ bestimmt.

Sind nun die Koordinaten der Punkte der beiden Kegelschnitte als Funktionen eines Parameters gegeben:

$$\varrho x_i = \varphi_i(\lambda) \qquad (a_{x_i}^2 = 0)$$
$$\sigma x_i' = \varphi_i'(\mu) \qquad (a_{x_i'}'^2 = 0),$$

so ergibt sich aus der gewonnenen Integralgleichung eine Beziehung zwischen den Parametern λ und μ, welche die Parameterdarstellung der Integralkurven des Konnexes Q aufzustellen gestattet. Ist nämlich λ_0 ein Parameterwert, der dem Punkte x_0 von $a_x^2 = 0$ zugehört, so ergibt sich aus der Integralgleichung ein Parameterwert μ, welcher einen zugehörigen Punkt x_0' von $a_x'^2 = 0$ bestimmt, und die Gerade $u = \widehat{x_0 x_0'}$ genügt mit ihrer benachbarten der Hauptkoinzidenz von Q. Man erhält somit eine Parameterdarstellung der Integralkurven des Konnexes Q in der Form:

$$u = (\varphi_i(\lambda) \cdot \varphi_i'(\mu)),$$

wo zwischen den Parametern λ und μ die aus der Integralgleichung resultierende Relation besteht, welche vermöge der in ihr enthaltenen Integrationskonstanten eine Schar von einfach unendlich vielen Kurven liefert. Partikuläre Integrale der Hauptkoinzidenz in Punktkoordinaten bilden die beiden Kegelschnitte $a_x^2 = 0$ und $a_x'^2 = 0$, in Linienkoordinaten die Klassenkurve $(a\,b\,u)^2 = 0$ zusammen mit dem Punktepaar $(b'\,a\,u)^2 = 0$ ebenso wie die Kurve $(a'\,b'\,u)^2 = 0$ mit dem Punktepaar $(b\,u\,a)^2 = 0$.

Man sieht, wie sich diese Betrachtungen verallgemeinern lassen. Soll zwischen zwei Differentialwerten der biquadratischen Gleichung des § 8 die Relation

$$D_1 = \varrho\, D_2$$

bestehen, so kann sich diese zunächst auf die Werte des Differentiales D beziehen. Dann muß zwischen den Koeffizienten der quadratischen Gleichung für D die Beziehung bestehen

$$\tfrac{1}{2}(\varrho+1)^2(F_{12}^2 - F_{11}F_{22})a_\xi^2 b_\eta^2 - \varrho \cdot F_{11} \cdot P^2 = 0$$

und die Integration dieses Konnexes, welcher sich für $\varrho = -1$ auf den in § 9 behandelten Konnex P reduziert, ist auf die Integration des Differentiales

$$D = \frac{a_x (c\,x\,d\,x)}{a_x^2 \cdot a_x\, a_c} \quad (a_x^2 = 0)$$

zurückgeführt. Ebenso ist durch die Quadratur des Differentiales

$$D' = \frac{a_x (c\,x\,d\,x)}{a_x^2 \cdot a_x' a_c'} \quad (a_x'^2 = 0)$$

die Integration des Konnexes

$$\tfrac{1}{2}(\varrho+1)^2(F_{12}^2 - F_{11}F_{22})a_\xi'^2 b_\eta'^2 - \varrho \cdot F_{22} \cdot P^2 = 0$$

bis auf ein dem obigen analoges Eliminationsverfahren geliefert.

Soll endlich die obige Relation zwischen den Differentialen D und D' bestehen, also $D = \varrho\, D'$ sein, so muß die Gleichung bestehen

$$\tfrac{1}{2}(F_{12}^2 - F_{11}F_{12})\{F_{11}\varrho^2 a_\xi'^2 b_\eta'^2 - F_{22}a_\xi^2 b_\eta^2\}^2$$
$$+ P^2 \cdot \varrho\,(1+\varrho)\,F_{11}F_{22}(F_{11}a_\xi'^2 b_\eta'^2 \varrho + F_{22}a_\xi^2 b_\eta^2) = 0$$

und die Integration dieser Hauptkoinzidenzgleichung ist ganz entsprechend dem obigen Verfahren auf die Quadraturen der beiden Differentiale D und D' zurückgeführt.

Lebenslauf.

Geboren am 29. April 1883 zu Neu-Ulm als Sohn des Lehrers Johann Degenhart besuchte ich die Volksschule daselbst und hierauf das Gymnasium zu Ulm, welches ich im Juli 1901 absolvierte. Sodann widmete ich mich an der Universität München dem Studium der Mathematik und unterzog mich im Jahre 1903 dem ersten Abschnitte, im Jahre 1905 dem zweiten Abschnitte der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Im Schuljahre 1905/06 nahm ich an dem pädagogisch-didaktischen Seminarkurse teil, welcher am Realgymnasium zu München unter Leitung des Herrn Oberstudienrates Dietsch abgehalten wurde. Im Studienjahre 1907/08 wurde mir von der philosophischen Fakultät, II. Sektion der Ludwig-Maximilians-Universität zu München ein v. Lamontsches Stipendium verliehen.

Vorlesungen besuchte ich bei folgenden Herren Professoren und Dozenten: v. Baeyer, Baur †, Döhlemann, Grätz, Hartogs, v. Heigel, Lindemann, v. Müller, Pringsheim, Ranke, Röntgen, v. Seeliger, Voß, v. Weber. Allen, deren Lehre mir zu teil geworden, sage ich bei dieser Gelegenheit herzlichsten Dank.